SISTEMAS FUZZY

Ricardo Tanscheit

DEE-PUC-Rio, C.P. 38.063,

22452-970 Rio de Janeiro, RJ

e-mail: ricardo@ele.puc-rio.br

1. INTRODUÇÃO

Seres humanos são capazes de lidar com processos bastante complexos, baseados em informações imprecisas ou aproximadas. A estratégia adotada pelos operadores humanos é também de natureza imprecisa e geralmente possível de ser expressa em termos linguísticos. A Teoria de Conjuntos Fuzzy e os Conceitos de Lógica Fuzzy podem ser utilizados para traduzir em termos matemáticos a informação imprecisa expressa por um conjunto de regras linguísticas. Se um operador humano for capaz de articular sua estratégia de ação como um conjunto de regras da forma *se ... então*, um algoritmo passível de ser implementado em computador pode ser construído. O resultado é um sistema de inferência baseado em regras, no qual a Teoria de Conjuntos Fuzzy e Lógica Fuzzy fornecem o ferramental matemático para se lidar com as tais regras linguísticas.

O objetivo aqui é introduzir os conceitos fundamentais da Teoria de Conjuntos Fuzzy, da Lógica Fuzzy e de Sistemas de Inferências Fuzzy, de modo a permitir um contato inicial com este campo extremamente vasto, com aplicações nas mais diferentes áreas do conhecimento. As primeiras aplicações bem sucedidas situaram-se na área de Controle, mas, desde então, tem-se verificado uma utilização crescente de sistemas fuzzy em outros campos, como, por exemplo, classificação, previsão de séries, mineração de dados, planejamento e otimização. O uso conjunto da lógica fuzzy e de outros sistemas classificados como *inteligentes* – redes neurais e programação evolutiva, por exemplo – tem propiciado a construção de sistemas híbridos, cuja capacidade de aprendizado tem ampliado o campo de aplicações.

A Teoria de Conjuntos Fuzzy foi concebida por L.A. Zadeh[a] com o objetivo de fornecer um ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago. A Lógica Fuzzy, baseada nessa teoria, foi inicialmente construída a partir dos conceitos já estabelecidos de lógica clássica; operadores foram definidos à semelhança dos tradicionalmente utilizados e outros foram introduzidos ao longo do tempo, muitas vezes por necessidades de caráter eminentemente prático.

Nas seções seguintes serão apresentados os conceitos fundamentais de Conjuntos Fuzzy e de Lógica Fuzzy, assim como algumas definições e operações que permitem abordar os

[a] Zadeh, L.A. (1965). "Fuzzy Sets". *Information and Control*, V. 8: 338-353.

mecanismos de inferência que servem de base para o que se convencionou chamar de *raciocínio aproximado*. Para isto será feita uma pequena recapitulação da lógica clássica, de modo a se entender a transposição de operadores para o âmbito da Lógica Fuzzy.

2. CONJUNTOS FUZZY

2.1. Fundamentos

Na teoria clássica dos conjuntos, o conceito de pertinência de um elemento a um conjunto fica bem definido. Dado um conjunto *A* em um universo *X*, os elementos deste universo simplesmente pertencem ou não pertencem àquele conjunto. Isto pode ser expresso pela função característica f_A:

$$f_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se e somente se } x \in A \\ 0 \text{ se e somente se } x \notin A \end{cases}$$

Zadeh propôs uma caracterização mais ampla, generalizando a função característica de modo que ela pudesse assumir um número infinito de valores no intervalo [0,1]. Um conjunto fuzzy *A* em um universo *X* é definido por uma função de pertinência $\mu_A(x): X \rightarrow [0,1]$, e representado por um conjunto de pares ordenados

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \quad x \in X$$

onde $\mu_A(x)$ indica o quanto *x* é compatível com o conjunto *A*. Um determinado elemento pode pertencer a mais de um conjunto fuzzy, com diferentes graus de pertinência.

O ***conjunto suporte*** de um conjunto fuzzy *A* é o conjunto de elementos no universo *X* para os quais $\mu_A(x) > 0$. Um conjunto fuzzy cujo suporte é um único ponto x' com $\mu_A(x') = 1$ é chamado de conjunto unitário fuzzy ou ***singleton***. Assim, um conjunto fuzzy também pode ser visto como o mapeamento do conjunto suporte no intervalo [0,1], o que implica em expressar o conjunto fuzzy por sua função de pertinência.

Conjuntos fuzzy podem ser definidos em universos contínuos ou discretos. Se o universo *X* for discreto e finito, o conjunto fuzzy *A* é normalmente representado:

- por um vetor contendo os graus de pertinência no conjunto *A* dos elementos correspondentes de *X* ;

- por meio da seguinte notação (que não deve ser confundida com a soma algébrica):

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_A(x_i)/x_i$$

Se o universo *X* for contínuo, emprega-se muitas vezes a seguinte notação (onde o símbolo de integral deve ser interpretado da mesma forma que o da soma no caso de um universo discreto):

$$\int_X \mu_A(x)/x$$

2.2. Variáveis linguísticas

Uma ***variável linguística*** é uma variável cujos valores são nomes de conjuntos fuzzy. Por exemplo, a *temperatura* de um determinado processo pode ser uma variável linguística assumindo valores *baixa*, *média*, e *alta*. Estes ***valores*** são descritos por intermédio de conjuntos fuzzy, representados por funções de pertinência, conforme mostrado na figura a seguir:

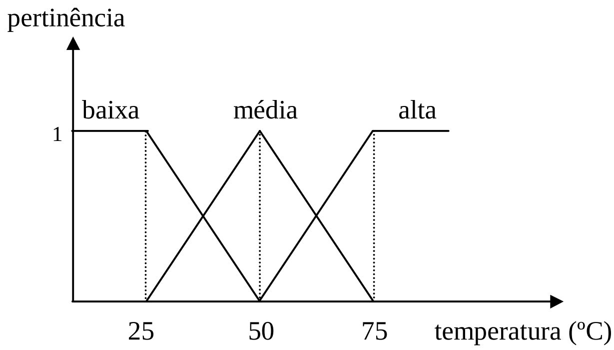


Figura 1 – Funções de pertinência para a variável *temperatura*

Generalizando, os ***valores*** de uma ***variável linguística*** podem ser sentenças em uma linguagem especificada, construídas a partir de *termos primários* (*alto*, *baixo*, *pequeno*, *médio*, *grande*, *zero*, por exemplo), de *conectivos lógicos* (negação *não*, conectivos *e* e *ou*), de *modificadores* (*muito*, *pouco*, *levemente*, *extremamente*) e de *delimitadores* (como parênteses).

A principal função das variáveis linguísticas é fornecer uma maneira sistemática para uma caracterização aproximada de fenômenos complexos ou mal definidos. Em essência, a utilização do tipo de descrição linguística empregada por seres humanos, e não de variáveis quantificadas, permite o tratamento de sistemas que são muito complexos para serem analisados através de termos matemáticos convencionais. Formalmente, uma variável linguística é caracterizada por uma quíntupla (*N*, *T*(*N*), *X*, *G*, *M*), onde:

N: nome da variável

T(*N*): conjunto de termos de N, ou seja, o conjunto de nomes dos valores linguísticos de N

X: universo de discurso

G: regra sintática para gerar os ***valores*** de N como uma composição de termos de *T*(*N*), conectivos lógicos, modificadores e delimitadores

M: regra semântica, para associar a cada valor gerado por *G* um conjunto fuzzy em *X*.

No caso da variável temperatura da Figura 1, ter-se-ia:

N: *temperatura*

T(*N*): {*baixa*, *média*, *alta*}

X: 0 a 100 ºC (por exemplo)

G: temperatura *não baixa e não muito alta*, por exemplo

M: associa o valor acima a um conjunto fuzzy cuja função de pertinência exprime o seu significado

2.3. Funções de pertinência

As funções de pertinência podem ter diferentes formas, dependendo do conceito que se deseja representar e do contexto em que serão utilizadas. Para exemplificar o quanto o contexto é relevante na definição de funções de pertinência e de sua distribuição ao longo de um dado universo, considere-se a variável linguística *estatura* (de pessoas), constituída dos seguintes termos: *T*(*estatura*) = {*baixa*, *média*, *alta*}. A esses faz-se corresponder conjuntos fuzzy *A*, *B* e *C*, respectivamente), definidos por suas funções de pertinência. Uma escolha possível de funções de pertinência seria:

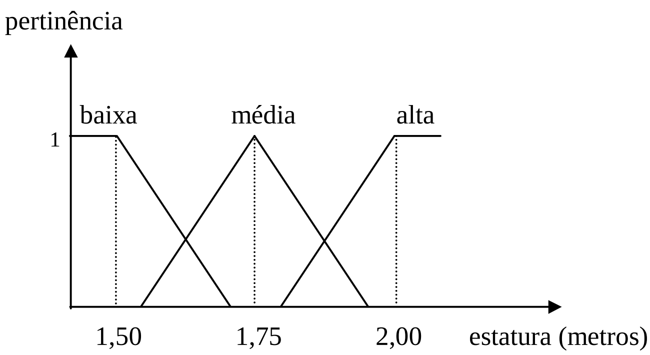


Figura 2 – Funções de pertinência para a variável *estatura*

Na definição acima, estaturas de até 1,5 metros apresentam grau de pertinência igual a 1 no conjunto *A*; o grau de pertinência neste conjunto decresce à medida que a estatura aumenta. Considera-se que uma estatura de 1,75 metros é "totalmente compatível" com o conjunto *B*, ao passo que estaturas acima de 1,8 metros (aproximadamente) apresentam grau de pertinência diferente de zero em *C*. Pessoas com estatura acima de 2 metros são "definitivamente" altas. Observe-se que, nesta definição das funções de pertinência, estaturas em um entorno de 1,75 metros têm grau de pertinência diferente de zero somente no conjunto *B*, o que poderia parecer inadequado para alguns observadores. Estes prefeririam que as funções de pertinência de *A* e *B* se interceptassem em 1,75 metros (com graus de pertinência nulos, a exemplo daquelas da Figura 1), por exemplo.

Além disso, diferentes pessoas, ou grupos de pessoas, podem ter noções distintas a respeito das estaturas de seus semelhantes. Um escandinavo provavelmente utilizaria funções de pertinência diferentes daquelas escolhidas por um representante de uma tribo de pigmeus, ou as distribuiria de outra forma ao longo do universo. Ou seja, o contexto é particularmente relevante quando da definição de funções de pertinência.

Funções de pertinência podem ser definidas a partir da experiência e da perspectiva do usuário mas é comum fazer-se uso de funções de pertinência padrão, como, por exemplo, as de forma triangular, trapezoidal e Gaussiana. Em aplicações práticas as formas escolhidas inicialmente podem sofrer ajustes em função dos resultados observados.

Funções de pertinência contínuas podem ser definidas por intermédio de funções analíticas. Por exemplo, a seguinte função geral pode ser usada para definir as funções de pertinência associadas aos conjuntos fuzzy correspondentes aos termos *pequeno*, *médio* e *grande*:

$$\mu_A(x) = (1 + (a(x-c))^b)^{-1}$$

A forma de $\mu_A(x)$ pode ser modificada através da manipulação dos três parâmetros *a*, *b* e *c*. Por exemplo:

$$\mu_{pequeno}(x) = (1 + 9x^2)^{-1}$$

$$\mu_{médio}(x) = (1 + 9(x-0,5)^2)^{-1}$$

$$\mu_{grande}(x) = (1 + 9(x-2)^2)^{-1}$$

Funções de pertinência descontínuas são compostas de segmentos contínuos lineares, resultando em formas triangulares ou trapezoidais. Funções de pertinência discretizadas consistem de conjuntos de valores discretos correspondendo a elementos discretos do universo. Por exemplo, se $X = \{0,1,2,3,4,5,6\}$, uma representação possível seria:

$$\mu_{pequeno}(x) = \{0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3;\ 0;\ 0\}$$

$$\mu_{médio}(x) = \{0;\ 0;\ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}3\}$$

$$\mu_{grande}(x) = \{0;\ 0;\ 0;\ 0\ \ 0{,}3;\ 0{,}7;\ 1\}$$

2.4. Definições e operações

A exemplo do que ocorre com conjuntos ordinários, há uma série de definições e operações envolvendo conjuntos fuzzy. Apresentam-se aqui as mais relevantes para uma abordagem inicial do assunto.

Um conjunto fuzzy *A* em *X* é ***vazio*** se e somente se sua função de pertinência é igual a zero sobre todo *X*:

$$A = \varnothing \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = 0 \quad \forall x \in X$$

O ***complemento*** *A'* de um conjunto fuzzy *A* é normalmente dado por:

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in X$$

Dois conjuntos fuzzy *A* e *B* em *X* são ***iguais*** se suas funções de pertinência forem iguais sobre todo *X*:

$$A = B \quad \text{se e somente se} \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Um conjunto fuzzy *A* é um ***subconjunto*** de *B* se sua função de pertinência for menor ou igual à de *B* sobre todo *X*:

$$A \subset B \quad \text{se} \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x) \quad \forall x \in X$$

Recorde-se que, no caso de **conjuntos ordinários**, a interseção de dois conjuntos *A* e *B* em um universo *X*, denotada por $A \cap B$, contém todos os elementos pertencentes a *A* **e** a *B* (i.e., $f_{A\cap B}(x) = 1$ se $x \in A$ e $x \in B$ e $f_{A\cap B}(x) = 0$ se $x \notin A$ ou $x \notin B$). A união dos mesmos conjuntos, denotada por $A \cup B$, contém todos os elementos que pertencem a *A* **ou** a *B*. Fazendo-se uso dos operadores minimum (*min* ou $\wedge$) e maximum (*max* ou $\vee$), as funções características dos conjuntos resultantes (interseção e união) podem ser representadas da seguinte forma:

$$f_{A\cap B}(x) = f_A(x) \wedge f_B(x) \qquad \forall x \in X$$

$$f_{A\cup B}(x) = f_A(x) \vee f_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Embora a união e a interseção possam ser descritas também por meio de outros operadores, Zadeh estendeu a descrição acima (com os operadores *min* e *max*) para a representação de interseção e união fuzzy, de modo que:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \qquad \forall x \in X$$

Zadeh também sugeriu a soma algébrica $[\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)]$ para a união fuzzy e o produto algébrico $[\mu_{A\cup B}(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)]$ para a interseção fuzzy. Posteriormente, com o objetivo de generalização, foram definidos operadores de base axiomática, baseados nos conceitos de norma triangular (***norma-t***) e co-norma ***triangular (co-norma-t*** ou ***norma-s***).

Uma *norma-t* é uma operação binária $*$: $[0,1]\times[0,1]\rightarrow[0,1]$ tal que, $\forall x$, y, z, $w \in [0,1]$, as seguintes propriedades são satisfeitas:

- Comutatividade: $x * y = y * x$
- Associatividade: $(x * y) * z = x * (y * z)$
- Monotonicidade: se $x \leq y$, $w \leq z$, então $x * w \leq y * z$
- Condições de contorno: $x * 0 = 0$ e $x * 1 = x$

Uma *co-norma-t*, ou *norma-s*, é uma operação binária $\oplus$: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, que satisfaz as seguintes propriedades:

- Comutatividade: $x \oplus y = y \oplus x$
- Associatividade: $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- Monotonicidade: se $x \leq y$, $w \leq z$, então $x \oplus w \leq y \oplus z$
- Condições de contorno: $x \oplus 0 = x$ e $x \oplus 1 = 1$

A bibliografia registra inúmeras normas-t e co-normas-t, mas, em aplicações – principalmente em engenharia –, têm sido utilizados preponderantemente os operadores *min* e *produto algébrico* para interseção e o operador *max* para a união.

2.5. Propriedades

Utilizando-se os operadores *max* e *min* para a descrição da união e interseção fuzzy, respectivamente, é fácil verificar que as seguintes propriedades algébricas de conjuntos ordinários também valem para conjuntos fuzzy:

- Involução: $(A')' = A$
- Idempotência: $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cup A = A \end{cases}$
- Comutatividade: $\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$
- Associatividade: $\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$
- Distributividade: $\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{cases}$
- Absorção: $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$
- Lei Transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- Leis de De Morgan: $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$

Observando que as funções de pertinência dos conjuntos vazio ($\varnothing$) e universo (X) são definidas como sendo 0 e 1, respectivamente, verificam-se também as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} A \cap \varnothing = \varnothing \\ A \cup \varnothing = A \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = X \end{cases}$$

As propriedades de conjuntos clássicos $A \cap A' = \varnothing$ e $A \cup A' = X$ ***não*** se verificam para conjuntos fuzzy quando os operadores *max* e *min* são utilizados:

$$\mu_{A \cap A'}(x) = \mu_A(x) \wedge (1 - \mu_A(x)) \neq 0 \Rightarrow A \cap A' \neq \varnothing$$
$$\mu_{A \cup A'}(x) = \mu_A(x) \vee (1 - \mu_A(x)) \neq 1 \Rightarrow A \cup A' \neq X$$

Observe-se que, em geral, normas-t e co-normas-t não satisfazem as duas leis acima; exceções são o produto limitado $\mu_A(x) * \mu_B(x) = max[0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1]$ e a soma limitada $\mu_A(x) \oplus \mu_B(x) = min[1, \mu_A(x) + \mu_B(x)]$. A distributividade também não é satisfeita para a maioria das normas-t e co-normas-t; exceções são os operadores *min* e *max*.

2.6. Relações Fuzzy

No caso de conjuntos ordinários, uma *relação* exprime a presença ou a ausência de uma associação (ou interação) entre elementos de dois ou mais conjuntos. Formalmente, dados dois universos X e Y, a relação R definida em $X \times Y$ é um subconjunto do produto cartesiano do dois universos, de tal forma que R: $X \times Y \rightarrow \{0,1\}$. Ou seja, se algum $x \in X$ e $y \in Y$ estiverem *relacionados*, $R(x, y) = 1$; caso contrário, $R(x, y) = 0$. Isto pode ser expresso pela seguinte função característica (ou função de pertinência bivalente):

$$f_R(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ se e somente se } (x, y) \in R \\ 0 \text{ em caso contrário} \end{cases}$$

As relações podem ser expressas de forma analítica (para universos infinitos, por exemplo), ou de forma tabular, muito utilizada no caso de universos finitos (e discretos). Esta última forma recebe o nome de *matriz relacional*, cujos elementos são ou *zero* ou *um*.

Relações fuzzy generalizam o conceito de relações e representam o *grau da associação* entre elementos de dois ou mais conjuntos fuzzy. Exemplos de caráter linguístico seriam: *x é muito maior* do que *y*, *x* está *próximo* de *y*. Formalmente, dados dois universos X e Y, a relação fuzzy R é um conjunto fuzzy em $X \times Y$, caracterizada por uma função de pertinência $\mu_R(x, y) \in [0,1]$, onde $x \in X$ e $y \in Y$.

A interseção e a união de *relações fuzzy* são definidas de forma similar às mesmas operações com conjuntos fuzzy. Considerando-se duas relações fuzzy R e S definidas em um mesmo espaço $X \times Y$, as funções de pertinência resultantes são:

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \mu_R(x, y) * \mu_S(x, y)$$

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \mu_R(x, y) \oplus \mu_S(x, y)$$

<u>Exemplo</u>: Sejam $X = \{x_1, x_2\} =$ {Fortaleza, Florianópolis}, $Y = \{y_1, y_2, y_3\} =$ {Porto Alegre, Criciúma, Curitiba} e R a relação "muito próxima". No caso ordinário, esta relação poderia ser dada pela função característica $f_R(x, y)$ expressa pela seguinte matriz relacional:

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0	0	0
x_2	Florianópolis	1	1	1

No caso de uma *relação fuzzy*, esta poderia ser dada pela seguinte função de pertinência $\mu_R(x, y)$:

		y_1	y_2	y_3
		Porto Alegre	Criciúma	Curitiba
x_1	Fortaleza	0,1	0,2	0,3
x_2	Florianópolis	0,8	1,0	0,8

2.7. Composição de relações

A *composição de relações* representa um papel muito importante em sistemas de inferência fuzzy. Considerem-se primeiramente duas relações *não-fuzzy* $P(X, Y)$ e $Q(Y, Z)$ que têm um conjunto (Y) em comum. A composição dessas duas relações é definida como um subconjunto $R(X, Z)$ de $X \times Z$ tal que $(x, z) \in R$ se e somente se existe pelo menos um $y \in Y$ tal que $(x, y) \in P$ e $(y, z) \in Q$, e é denotada por $R(X, Z) = P(X, Y) \circ Q(Y, Z)$.

<u>Exemplo</u>: Sejam as relações não-fuzzy definidas pelas seguintes matrizes relacionais:

$$P(X,Y) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad Q(Y,Z) = \begin{array}{c} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A composição dessas duas relações será:

$$R(X,Z) = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A operação realizada para se obter $R(X,Z)$ no exemplo acima pode ser representada por qualquer uma (embora não somente) das seguintes expressões:

- ***composição max-min***: $f_R(x,z) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [min(f_P(x,y), f_Q(y,z))]\}$
- ***composição max-produto***: $f_R(x,z) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x,z), \max_y [(f_P(x,y)\, f_Q(y,z))]\}$

Aplique-se, por exemplo, a composição *max-min* ao cálculo do elemento (x_1, z_2) de R:

$$f_R(x_1,z_2) = f_{P\circ Q}(x,z) = \{(x_1,z_2), \max_y [min(f_P(x_1,y), f_Q(y,z_2))]\}$$

$$= \{(x_1,z_2), max[min(f_P(x_1,y_1), f_Q(y_1,z_2)), min(f_P(x_1,y_2), f_Q(y_2,z_2)),$$
$$min(f_P(x_1,y_3), f_Q(y_3,z_2)), min(f_P(x_1,y_4), f_Q(y_4,z_2))]\}$$

$$= \{(x_1,z_2), max[min(0,0), min(1,0), min(0,1), min(1,0)]\}$$

$$= \{(x_1,z_2), max[0,0,0,0)]\} = 0$$

Um maneira prática de realizar as operações acima consiste em se efetuar a "multiplicação" das matrizes relacionais, tomando o cuidado de substituir cada multiplicação pela operação *min* e cada adição pelo operador *max*. Se, ao invés de *min*, for empregado o *produto*, o resultado será o mesmo.

A ***composição de relações fuzzy*** é definida de maneira análoga à apresentada acima; a expressão para a função de pertinência resultante da composição de duas relações fuzzy com um conjunto fuzzy em comum é generalizada para:

$$\mu_R(x,z) = \mu_{P\circ Q}(x,z) = \sup_y [\mu_P(x,y) * \mu_Q(y,z)]$$

onde a norma-t (representada por $*$) é normalmente o *min* ou o *produto*, embora seja permitido usar outras normas-t. No caso de *universos finitos*, a operação *sup*[b] é o maximum.

Exemplo: Sejam os conjuntos de estudantes *X* = {*Maria*, *João*, *Pedro*}, de características de cursos *Y* = {*teoria* (*t*), *aplicação*(*a*), *hardware* (*h*), *programação* (*p*)}, e de cursos *Z* = {*lógica fuzzy* (*LF*), *controle fuzzy* (*CF*), *redes neurais* (*RN*), *sistemas especialistas* (*SE*)}. Os interesses dos estudantes (em termos das características em *Y*) são representados pela matriz relacional *P*, ao passo que as características (*Y*) dos cursos em *Z* são dadas pela matriz relacional *Q*.

$$P(X,Y) = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t & a & h & p \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}1 \\ 1 & 0{,}1 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad Q(Y,Z) = \begin{array}{r} \\ t \\ a \\ h \\ p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A *composição max-min* de *P* e *Q* pode servir de auxílio aos estudantes na escolha dos cursos:

$$P \circ Q = \begin{array}{r} \\ Pedro \\ Maria \\ João \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} LF & CF & RN & SE \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}2 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}9 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

A *composição max-produto* proporcionaria o mesmo resultado *neste exemplo*, mas isto *não pode ser generalizado* – e se constitui numa diferença significativa entre composições de relações não-fuzzy e fuzzy.

Considere-se agora o caso especial em que a relação *P* é ***um conjunto fuzzy*** apenas, de forma, que, em vez de $\mu_P(x,y)$, tem-se $\mu_P(x)$. Isto é equivalente a se ter *X* = *Y* e a composição torna-se somente uma função de *z*, denotada pela seguinte função de pertinência:

$$\mu_R(z) = \sup_x [\mu_P(x) * \mu_Q(x,z)]$$

[b] simplificadamente, o supremum (*sup*) é o menor limite superior de um conjunto S e não necessariamente pertence a este conjunto; um limite superior que pertence ao conjunto é chamado de maximum (*max*). Se o conjunto tiver um maximum, obviamente terá um supremum.

Do ponto de vista operacional, tem-se a "multiplicação" de um vetor por uma matriz, observando-se as substituições adequadas de operadores; o resultado é um vetor.

Este é um resultado fundamental para o desenvolvimento de um sistema de inferência fuzzy, conforme será visto mais adiante.

2.8. Proposições Fuzzy

Uma frase da forma Π é *A*, onde Π é o nome de uma variável linguística e *A* é um conjunto fuzzy definido no universo de discurso *X* de Π, é chamada de ***proposição fuzzy***. No caso mais geral de uma proposição fuzzy n-ária, a representação se dá através do produto cartesiano das variáveis linguísticas e da utilização de relações fuzzy.

Proposições fuzzy podem ser combinadas por meio de diferentes operadores, como, por exemplo, os conectivos lógicos *e* e *ou*, a negação *não* e o operador de implicação *se ... então*; as proposições fuzzy daí resultantes podem ser descritas em termos de relações fuzzy.

Em geral, o conectivo *e* é usado com variáveis em diferentes universos, enquanto que o conectivo *ou* conecta valores linguísticos de uma mesma variável, os quais estão no mesmo universo. Quando o conectivo *ou* é empregado para conectar variáveis em uma sentença do tipo *se . . . então*, ele pode ser usado com duas variáveis diferentes. Por exemplo: *se* a pressão é *alta* ***ou*** a velocidade é *rápida então* o controle é zero.

A operação *não* é considerada como semanticamente sinônima da negação em linguagem natural:

$$A = \{\mu_A(x)/x\} \;\Rightarrow\; \textit{não}\ A = \{(1-\mu_A(x))/x\}$$

Exemplo: pressão é *não alta*.

Considerem-se:

- variáveis linguísticas de nomes *x* e *y* definidas nos universos *X* e *Y*, respectivamente;
- conjuntos fuzzy *A* e *B* definidos nos universos *X* e *Y*, respectivamente;
- Proposições fuzzy: $\begin{cases} x \text{ é } A \\ y \text{ é } B \end{cases}$

Conectando-se essas proposições através do conectivo *ou*, tem-se a proposição fuzzy $(x \text{ é } A)\ ou\ (y \text{ é } B)$, que pode ser expressa por uma *relação fuzzy* $R_{A\,ou\,B}$, cuja função de pertinência é dada por $\mu_R(x,y) = \mu_A(x) \oplus \mu_B(y)$. Caso as proposições sejam conectadas por *e*, a função de pertinência da relação $R_{A\,e\,B}$ é dada por $\mu_R(x,y) = \mu_A(x) * \mu_B(y)$. Esclarecendo, o operador usado para representar o conectivo *ou* é normalmente uma co-norma-t, enquanto que uma norma-t é utilizada na representação do conectivo *e*.

O operador *se ... então* é também conhecido como *declaração condicional fuzzy* e descreve a dependência do *valor* de uma variável linguística em relação ao *valor* de outra. Em muitas aplicações essas declarações condicionais são simplesmente denominadas ***regras linguísticas***, constituindo-se em frases da forma ***se*** *x* é *A* ***então*** *y* é *B*. Uma frase deste tipo é normalmente denominada ***implicação*** e é representada por uma relação $R_{A \to B}$, expressa pela função de pertinência:

$$\mu_{A \to B}(x,y) = f_{\to}(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

onde $f_{\to}$ é o ***operador de implicação***.

Quando uma declaração condicional apresenta mais do que uma variável ***antecedente*** (*x* é *A*), as diversas variáveis são geralmente combinadas por meio do conectivo ***e***:

$$se\ (x_1 \text{ é } A_1)\ e\ (x_2 \text{ é } A_2)\ e........e\ \ (x_m \text{ é } A_m)\ então\ (y \text{ é } B)$$

que pode ser representada por uma relação expressa pela seguinte função de pertinência:

$$\mu_R(x_1, x_2, ..., x_m, y) = f_{\to}(f_e(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_m}(x_m)), \mu_B(y))$$

onde f_e é o operador (geralmente *min* ou *produto*) que representa o conectivo *e*.

Várias declarações podem ser combinadas por meio do conectivo *ou*:

$$\begin{aligned}
&R^1 : se\ (x \text{ é } A^1)\ \ então\ (y \text{ é } B^1)\ \ ou \\
&R^2 : se\ (x \text{ é } A^2)\ \ então\ (y \text{ é } B^2)\ \ ou \\
&\vdots \\
&R^n : se\ (x \text{ é } A^n)\ \ então\ (y \text{ é } B^n)
\end{aligned}$$

A função de pertinência do conjunto R^N de declarações é:

$$\mu_{R^N}(x,y) = f_{ou}[\mu_{R^1}(x,y), \mu_{R^2}(x,y), \dots, \mu_{R^n}(x,y)]$$
$$= f_{ou}[f_{\rightarrow}(\mu_{A^1}(x), \mu_{B^1}(y)), f_{\rightarrow}(\mu_{A^2}(x), \mu_{B^2}(y)), \dots, f_{\rightarrow}(\mu_{A^n}(x), \mu_{B^n}(y))]$$

Observe-se a distinção feita nas notações para o caso de se ter mais de um antecedente e para a existência de várias frases do tipo *se ... então*. Na primeira situação, tem-se várias variáveis, cada uma delas com seus valores, e apenas um valor (*B*) para o *consequente* (*y* é *B*). Na segunda, a variável é a mesma em todos os antecedentes e os valores da variável do consequente são distintos.

3. LÓGICA FUZZY

Conforme visto, regras são expressas através de *implicações lógicas* da forma *se ... então*, representando uma relação $R_{A \rightarrow B}$ entre um ou mais *antecedentes* e um ou mais *consequentes*. A função de pertinência associada a esta relação é definida por intermédio do operador de implicação $f_{\rightarrow}$, que deve ser escolhido apropriadamente. O conceito de implicação está relacionado a um ramo da matemática conhecido como *lógica proposicional*, que é isomórfica à *teoria dos conjuntos*, sendo que ambas são isomórficas à *álgebra booleana*.

Para estabelecer o conceito de implicação na lógica fuzzy, é feita a seguir uma pequena revisão de lógica proposicional, para em seguida se passar à Lógica Fuzzy propriamente dita.

3.1. Lógica Tradicional e Inferência

Na lógica tradicional lida-se com proposições, que podem ser *verdadeiras* ou *falsas*. As combinações de proposições (*p* e *q*, a seguir), para formar novas proposições, são efetuadas a partir de três operações básicas:

- *conjunção* ($p \wedge q$): estabelece a verdade simultânea de 2 proposições *p* e *q*
- *disjunção* ($p \vee q$): serve para estabelecer a verdade de uma ou de ambas as proposições
- *implicação* ($p \rightarrow q$): regra *se... então*

São também utilizadas:

- *negação* ($\sim p$): para se dizer "é falso que....."
- *equivalência* ($p \leftrightarrow q$): significa que *p* e *q* são ambos verdadeiros ou falsos

Na lógica proposicional, proposições não relacionadas entre si podem ser combinadas para formar uma *implicação*, e não se considera nenhuma relação de *causalidade*, tão presente no mundo real e em aplicações em engenharia. Para determinar quando a implicação é verdadeira ou falsa, pode ser interessante formulá-la da seguintes forma: p é condição suficiente para q, i.e, se p for verdadeira, q também o será (basta a verdade de p para que q seja verdadeira). Com base nisto, verifica-se que, se a verdade de p se fizer seguir da de q, a implicação é verdadeira. Se p é verdadeira e q é falsa, i.e., p não é suficiente para q, a implicação é falsa. Quando a condição p não é satisfeita (p é falsa), não há uma maneira direta de se avaliar a implicação; assim, estipula-se que ela é *verdadeira* sempre que o antecedente for *falso*.

As relações entre proposições são normalmente mostradas através de uma *tabela verdade*; as tabelas verdade para conjunção, disjunção, implicação, equivalência e negação, que constituem axiomas fundamentais da lógica proposicional, estão mostradas na Tabela 1, onde V significa *verdadeiro* e F, *falso*.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Tabela 1 - Tabelas verdade para cinco operações fundamentais de lógica

<u>Exemplo</u>: apesar da implicação, na lógica proposicional, não considerar a causalidade, é possível "confirmar" sua tabela verdade com situações do dia-a-dia. Considere-se, por exemplo, a declaração condicional "*se* eu <u>estiver bem de saúde</u> (p), *então* <u>irei à escola</u> (q)". A questão é: quando é que esta declaração é *falsa*? As situações possíveis são:

- p = V (estou bem de saúde) e q = V (fui à escola): promessa cumprida (declaração *verdadeira*)
- p = V (estou bem de saúde) e q = F (não fui à escola): promessa violada (declaração *falsa*)
- p = F (não estou bem de saúde) e q = V (fui à escola): promessa (de ir à escola) cumprida (declaração *verdadeira*)
- p = F (não estou bem de saúde) e q = F (não fui à escola): promessa não violada (declaração *verdadeira*)

Um outro exemplo de uma implicação ser verdadeira mesmo que as premissas sejam falsas é "*se* 3 é um quadrado perfeito, *então* 3 não é primo". Obviamente, o número primo 3 não é um quadrado perfeito, mas a *declaração é verdadeira* se considerarmos que quadrados perfeitos não podem ser números primos.

Uma afirmação bastante ouvida no dia-a-dia é: "se isto (algo extraordinário ou inusitado) realmente aconteceu, então eu sou o papa". Este tipo de expressão é uma maneira de se afirmar a falsidade do antecedente, ou seja, se a falsidade existe mesmo, então qualquer *coisa* pode ocorrer (inclusive "eu ser o papa"). Portanto, antecedentes falsos criam implicações verdadeiras.

Uma *tautologia* é uma proposição sempre *verdadeira*, formada a partir da combinação de outras proposições. As tautologias de maior interesse no âmbito desta discussão são:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim [p \wedge (\sim q)]$$

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$$

conforme demonstrado na Tabela 2.

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge (\sim q)$	$\sim [p \wedge (\sim q)]$	$\sim p$	$(\sim p) \vee q$
V	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	V	F	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V

Tabela 2 - Provas de equivalências

Algumas das equivalências mais importantes entre lógica, teoria dos conjuntos e álgebra booleana são:

Lógica	Teoria dos Conjuntos	Álgebra Booleana
$\wedge$	$\cap$	$\times$
$\vee$	$\cup$	$+$
$\sim$	$'$	$'$
V		1
F		0
$\leftrightarrow$		=

Relembrando que, na teoria clássica de conjuntos, a função característica pode assumir apenas 2 valores (1 ou 0, indicando pertinência ou não, respectivamente), observando as equivalências acima entre lógica, teoria dos conjuntos e álgebra booleana, e utilizando as duas tautologias já mencionadas, podem ser obtidas as seguintes *funções características* para a *implicação* (denotadas por $f_{p\to q}(x,y)$):

$$(p \to q) \leftrightarrow \sim[p \wedge (\sim q)]: \quad f_{p\to q}(x,y) = 1 - min[f_p(x), 1 - f_q(y)]$$

$$(p \to q) \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]: \quad f_{p\to q}(x,y) = max[1 - f_p(x), f_q(y)]$$

Isto é demonstrado, na Tabela 3, construída com base na Tabela 2 fazendo-se os lógicos *V* e *F* corresponderem aos booleanos 1 e 0):

$f_p(x)$	$f_q(y)$	$1 - f_p(x)$	$1 - f_q(y)$	$max\ [1 - f_p(x), f_q(y)]$	$1 - min\ [f_p(x), 1 - f_q(y)]$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Tabela 3 - Validação das equivalências da Tabela 2

Existem inúmeras outras funções características para implicação, não necessariamente fazendo uso dos operadores *max* e *min* aqui utilizados.

Na lógica proposicional há dois tipos importantes de *mecanismos* (ou *regras*) *de inferência*: *Modus Ponens* e *Modus Tollens*. O primeiro é de grande relevância para aplicações em engenharia e, portanto, é apresentado a seguir:

Premissa 1:	*x* é *A*
Premissa 2:	*se* (*x* é *A*) *então* (*y* é *B*)
Consequência:	*y* é *B*

O *Modus Ponens* é associado à implicação *A implica em B* (A →B); usando-se as proposições *p* e *q*, pode ser expresso como $(p \wedge (p \to q)) \to q$.

3.2. Lógica Fuzzy

Os conceitos de lógica fuzzy nasceram inspirados na lógica tradicional, embora modificações tenham se tornado necessárias para adaptá-los aos requisitos de aplicações em engenharia.

A extensão da lógica tradicional para a lógica fuzzy foi efetuada através da simples substituição das funções características (ou funções de pertinência bivalentes) da primeira por funções de pertinência fuzzy, à semelhança da extensão de conjuntos ordinários para conjuntos fuzzy. Assim, a declaração condicional *se x é A então y é B* tem uma função de pertinência $\mu_{A\to B}(x,y)$ que mede o *grau de verdade* da relação de implicação entre *x* e *y*. Exemplos de $\mu_{A\to B}(x,y)$, obtidos pela simples *extensão* de funções de pertinência bivalentes da lógica proposicional para a lógica fuzzy, são:

$$\mu_{A\to B}(x,y) = 1 - min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]$$

$$\mu_{A\to B}(x,y) = max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)]$$

Quanto à inferência, o *modus ponens* é estendido para o *modus ponens generalizado*, descrito da seguinte forma:

Premissa 1: *x* é A^*
Premissa 2: *se x* é *A então y* é *B*
Consequência: *y* é B^*

No *modus ponens generalizado*, o conjunto fuzzy A^* não é necessariamente o mesmo que *A* (antecedente da regra), assim como B^* não é necessariamente o mesmo que o consequente *B*. Na lógica clássica, uma regra será "disparada" somente se a Premissa 1 for exatamente o antecedente da regra, e o resultado será exatamente o consequente dessa regra. Na lógica fuzzy, uma regra será disparada se houver um *grau de similaridade* diferente de zero entre a Premissa 1 e o antecedente da regra; o resultado será um consequente com grau de similaridade não nulo em relação ao consequente da regra.

Formalmente, a função de pertinência do consequente, $\mu_{B^*}(y)$, é obtida a partir do conceito de *regra de inferência composicional* $B^* = A^* \circ R$, na qual a conexão entre as duas proposições é representada *explicitamente* por uma relação *R*. O modus ponens generalizado (onde a relação fuzzy é representada de modo *implícito* pela regra *se ... então*) é um caso especial dessa regra, embora os dois nomes sejam frequentemente empregados como "sinônimos".

A questão pode ser recolocada como: dada uma relação entre duas variáveis fuzzy, qual o consequente para um dado antecedente? Isto é equivalente a se considerar duas proposições fuzzy: uma simples, correspondendo a um fato, e outra correspondendo a uma regra fuzzy. O modus ponens generalizado pode ser visto, então, como uma *composição fuzzy*, onde a primeira relação é meramente um conjunto fuzzy. Utilizando a expressão já vista para a *composição de um conjunto fuzzy com uma relação fuzzy* (seção 2.7), tem-se:

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_R(x, y)]$$

Como R é uma *relação de implicação*, a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\mu_{B^*}(y) = \sup_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

Exemplo: Considerem-se dois conjuntos fuzzy A e B, em universos discretos e finitos X e Y, respectivamente, cujas funções de pertinência (expressas pelos graus de pertinência de cada um dos elementos dos universos) são:

$$\mu_A(x) = \{0;\ 0{,}2;\ 0{,}7; 1;\ 0{,}4;\ 0\} \qquad\qquad \mu_B(y) = \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0\}$$

Supondo que a relação de implicação entre A e B seja dada por:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = max[1 - \mu_A(x), \mu_B(y)],$$

tem-se:

$$\mu_{A \to B}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}8 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 1 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como os universos são discretos e finitos, a operação *sup* torna-se *max* e a função de pertinência do consequente fica:

$$\mu_{B^*}(y) = \max_{x \in A^*} [\mu_{A^*}(x) * \mu_{A \to B}(x, y)]$$

Se A^* for dado pela função de pertinência $\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0{,}3;\ 0{,}8; 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2\}$, e utilizando-se o *min* para a norma-t, tem-se:

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{Bmatrix} max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0{,}3;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}8;\ 0{,}7 \wedge 0{,}8;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 1;\ 0{,}8 \wedge 1;\ 1 \wedge 1;\ 0{,}7 \wedge 1;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}5;\ 1 \wedge 0{,}5;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0{,}3 \wedge 0{,}8;\ 0{,}8 \wedge 0{,}3;\ 1 \wedge 0;\ 0{,}7 \wedge 0{,}6;\ 0{,}2 \wedge 1); \end{Bmatrix}$$

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{Bmatrix} max(0;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}6;\ 0{,}2); \\ max(0;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}2); \\ max(0;\ 0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}7;\ 0{,}2); \\ max(0;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 0{,}6;\ 0{,}2); \\ max(0;\ 0{,}3;\ 0{,}3;\ 0;\ 0{,}6;\ 0{,}2) \end{Bmatrix} = \{0{,}6;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}6;\ 0{,}6\}$$

Caso se utilizasse *min* para a implicação, o resultado seria: $\mu_{B^*}(y) = \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0\}$, que é *circunstancialmente* idêntico à função de pertinência de *B*.

É muito comum, em aplicações, ter-se como "informação" dados (ou entradas) não-fuzzy, i.e.

$$\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x = x' \\ 0 & \text{para todo outro } x \in X \end{cases}$$

Fazendo uso do <u>exemplo acima</u>, uma entrada não-fuzzy poderia ser representada pela seguinte função de pertinência, por exemplo: $\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\}$, o que proporcionaria o seguinte resultado:

$$\mu_{B^*}(y) = \begin{Bmatrix} max(0 \wedge 1;\ 0 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}3;\ 0 \wedge 0{,}3;\ 0 \wedge 0{,}6;\ 0 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}8;\ 0 \wedge 0{,}8;\ 0 \wedge 0{,}8; 0 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0 \wedge 1;\ 1 \wedge 1;\ 1 \wedge 1;\ 0 \wedge 1;\ 0 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}5;\ 0 \wedge 0{,}5;\ 0 \wedge 0{,}6;\ 0 \wedge 1); \\ max(0 \wedge 1;\ 0 \wedge 0{,}8;\ 1 \wedge 0{,}3;\ 0 \wedge 0;\ 0 \wedge 0{,}6;\ 0 \wedge 1); \end{Bmatrix} = \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}3\}$$

Na realidade, quando se tem uma entrada não-fuzzy, é possível efetuar uma simplificação na expressão para $\mu_{B^*}(y)$. Como $x \neq 0$ apenas em um ponto ($x = x'$), a operação *sup* torna-se desnecessária e, em consequência:

$$\mu_{B^*}(y) = [\mu_{A^*}(x') * \mu_{A \to B}(x', y)] = [1 * \mu_{A \to B}(x', y)] = \mu_{A \to B}(x', y)$$

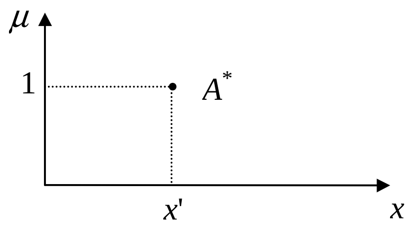
Utilizando este resultado e refazendo o exemplo (mantendo a mesma implicação e ainda com $\mu_{A^*}(x) = \{0;\ 0;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0\}$), verifica-se que o procedimento é bem mais simples. Basta observar que $\mu_A(x') = 0{,}7$ [i.e. $1 - \mu_A(x') = 0{,}3$)] e substituir na expressão:

$$\mu_{B^*}(x, y) = \mu_{A \to B}(x', y) = max[1 - \mu_A(x'), \mu_B(y)]$$

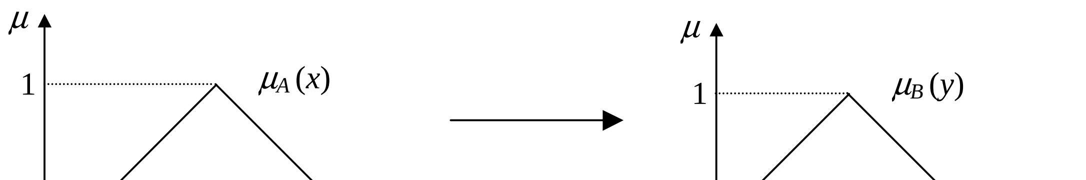
$$\mu_{B^*}(x, y) = \{0{,}3 \vee \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0\}\} = \{0{,}3;\ 0{,}8;\ 1;\ 0{,}5;\ 0{,}3\}$$

Considere-se, agora, a *implicação* $\mu_{A \to B}(x, y) = 1 - min[\mu_A(x), 1 - \mu_B(y)]$ e conjuntos fuzzy *A* e *B*, representados por *funções de pertinência triangulares*, em universos contínuos. O consequente será dado pela função de pertinência $\mu_{B^*}(y) = 1 - min[\mu_A(x'), 1 - \mu_B(y)]$. As operações acima podem ser representadas graficamente como:

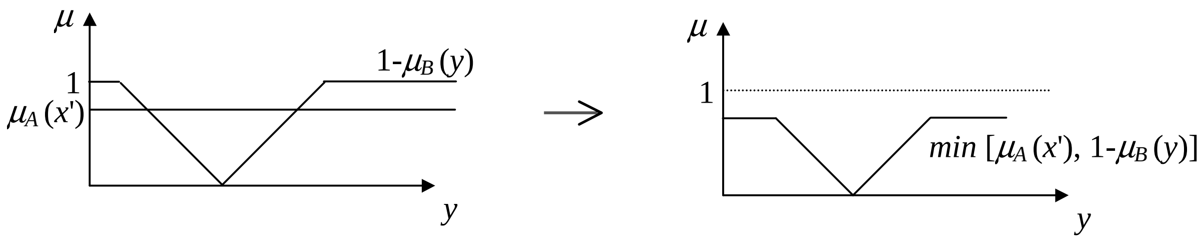
Premissa 1 (informação ou entrada):



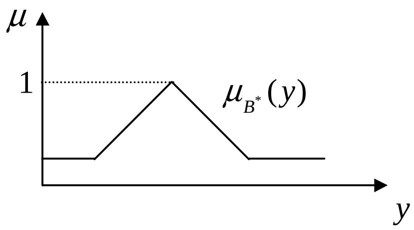
Regra (implicação): *se A então B*



Operações (passo a passo), observando que $\mu_A(x') < 1$:



Resultado final (consequente ou saída):



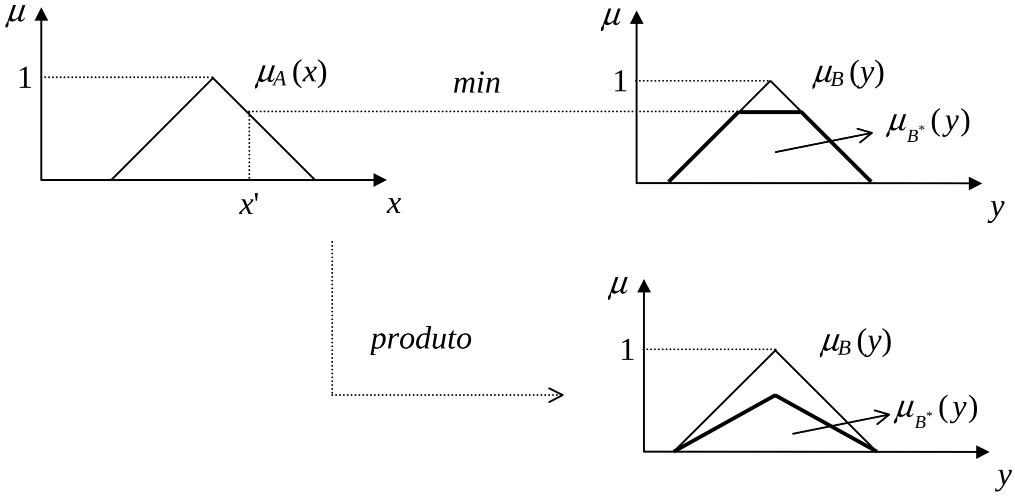
Para a implicação considerada, observa-se que o resultado de uma regra específica, cujo consequente é associado a um conjunto fuzzy com *suporte finito*, é um conjunto fuzzy com *suporte infinito*. Este comportamento, que é observado também para outras implicações, viola o *senso comum*, de importância em aplicações de engenharia.

Este exemplo pode ser repetido para outras implicações e o problema aqui apresentado persiste. Observa-se, portanto, que a utilização de implicações inspiradas na lógica tradicional pode levar a conclusões sem muito sentido quando o enfoque é de aplicações em engenharia, onde a noção de causa e efeito tem um papel relevante. Em virtude disto, a necessidade fez com que fossem definidas outras implicações, mesmo rompendo o vínculo com a lógica proposicional.

Os primeiros problemas de aplicação de lógica fuzzy situaram-se na área de Controle, quando foram definidas as implicações *min* e *produto*, que têm sido, desde então, as mais usadas em engenharia. A tabela verdade destas implicações, em lógica proposicional tradicional, mostra que a implicação é verdadeira somente quando ambos o antecedente e o consequente forem verdadeiros (como a tabela verdade de *e*). O uso da implicação *min* fornece como resultado:

$$\mu_{B^*}(y) = \mu_A(x') \wedge \mu_B(y)$$

Considerando funções de pertinência triangulares, por exemplo, a função de pertinência $\mu_{B^*}(y)$ terá uma forma trapezoidal, conforme pode ser visto na figura a seguir. O uso da implicação *produto*, fornece a função de pertinência $\mu_{B^*}(y)$ também mostrada na figura. Com ambas as implicações, $\mu_{B^*}(y)$ corresponde a um conjunto fuzzy associado exatamente com o consequente da regra e com *suporte finito*. Além disso, pode ser verificado que $\mu_{B^*}(y) = 0$ para todo $x \neq x'$, o que é muito mais condizente com aplicações em engenharia.

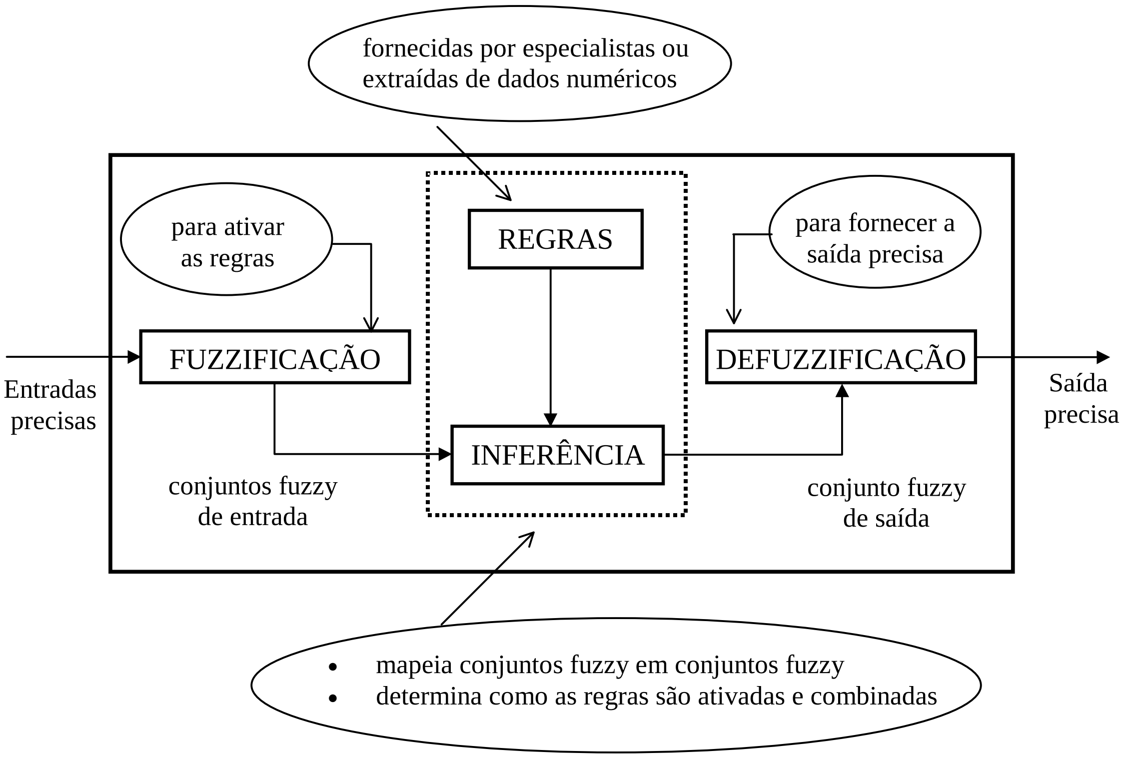


O grau de pertinência de *x*' em *A* estabelece o ***grau de ativação*** de uma determinada regra. Quanto mais a *entrada* for compatível com o *antecedente* da regra, mais peso terá o seu consequente no resultado final. Se $\mu_A(x') = 1$**,** indicando "compatibilidade total" de *x*' com *A*, B^* será o próprio conjunto *B*.

Foi visto na seção 2.8 que vários antecedentes conectados por *e*, assim como sentenças linguísticas (ou regras) conectadas por *ou*, podem ser traduzidas matematicamente por meio do ferramental de lógica fuzzy (faz-se uso dos operadores f_e , f_{ou} e $f_{\rightarrow}$). Quanto ao operador de implicação, a extensão da lógica proposicional para a lógica fuzzy e as subsequentes discussões sobre a necessidade de, em aplicações, preservar-se a noção de causa e efeito, fornecem elementos suficientes para se realizar uma boa escolha. Apesar de *min* e *produto* serem efetivamente os mais empregadas em aplicações, muitos outros operadores de implicação têm sido sugeridos na literatura de lógica fuzzy, conforme pode ser verificado nas referências apresentadas ao final deste texto. De uma maneira geral utilizam-se normas-t em associação com a implicação. Quanto aos operadores f_e e f_{ou}, normalmente utilizam-se normas-t (particularmente *min*) em associação com o primeiro, e co-normas-t (particularmente *max*) em associação com o segundo. No *modus ponens generalizado*, a norma-t mais utilizada é *min*, dando origem à regra de inferência *max-min* (ou *sup-min*).

4. SISTEMA DE INFERÊNCIA FUZZY

Um Sistema de Inferência Fuzzy é mostrado na figura abaixo, onde estão identificadas as funções de cada bloco.



Neste Sistema de Inferência Fuzzy, consideram-se entradas não-fuzzy, ou *precisas* – resultantes de medições ou observações (conjuntos de dados, por exemplo) –, que é o caso da grande maioria das aplicações práticas. Em virtude disto, é necessário efetuar-se um *mapeamento* destes dados precisos para os conjuntos fuzzy (de entrada) relevantes, o que é realizado no estágio de ***fuzzificação***. Neste estágio ocorre também a *ativação* das regras relevantes para uma dada situação.

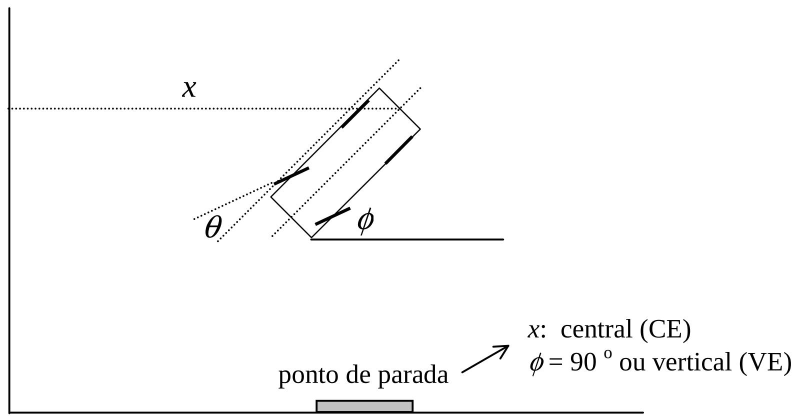
Uma vez obtido o conjunto fuzzy de saída através do processo de inferência (modus ponens generalizado), no estágio de ***defuzzificação*** é efetuada uma *interpretação* dessa informação. Isto se faz necessário pois, em aplicações práticas, geralmente são requeridas saídas precisas. No caso de uma sistema de controle, por exemplo, em que o controle é efetuado por um sistema de inferência fuzzy (ou *controlador fuzzy*), este deve fornecer à planta dados ou sinais precisos, já que a "apresentação" de um conjunto fuzzy à entrada da planta não teria significado algum. Existem vários métodos de defuzzificação na literatura; dois dos mais empregados são *o centro de gravidade* e a *média dos máximos*. Neste, a saída precisa é obtida tomando-se a média entre os dois elementos extremos no universo que correspondem aos maiores valores da função de pertinência do consequente. Com o *centro de gravidade*, a saída é o valor no universo que divide a área sob a curva da função de pertinência em duas partes iguais.

As ***regras*** podem ser fornecidas por especialistas, em forma de sentenças linguísticas, e se constituem em um aspecto fundamental no desempenho de um sistema de inferência fuzzy. Novamente tomando o exemplo de um controlador fuzzy, este só terá um bom desempenho se as regras que definem a estratégia de controle forem consistentes. Extrair regras de especialistas na forma de sentenças do tipo *se ... então* pode não ser uma tarefa fácil, por mais conhecedores que eles sejam do problema em questão. Alternativamente ao uso de especialistas para a definição da base de regras, existem métodos de extração de regras de dados numéricos. Este métodos são particularmente úteis em problemas de classificação e previsão de séries temporais.

No estágio de ***inferência*** ocorrem as operações com conjuntos fuzzy propriamente ditas: combinação dos *antecedentes* das regras, *implicação* e *modus ponens generalizado*. Os conjuntos fuzzy de entrada, relativos aos antecedentes das regras, e o de saída, referente ao consequente, podem ser definidos previamente ou, alternativamente, gerados automaticamente a partir dos dados.

Um aspecto importante é a definição dos conjuntos fuzzy correspondentes às variáveis de entrada (antecedentes) e à(s) de saída (consequente(s)), pois o desempenho do sistema de inferência dependerá do número de conjuntos e de sua forma. Pode-se efetuar uma sintonia "manual" das funções de pertinência dos conjuntos, mas é mais comum empregarem-se métodos automáticos. A integração entre sistemas de inferência fuzzy e redes neurais – originando os sistemas neuro-fuzzy – ou algoritmos genéticos tem se mostrado adequada para a sintonia de funções de pertinência, assim como para a geração automática de regras.

De modo a verificar o funcionamento completo de um sistema de inferência fuzzy, considere-se o problema do estacionamento de um veículo, cuja posição é determinada pelas variáveis x (distância no eixo horizontal) e ϕ (ângulo do veículo em relação ao eixo horizontal). A variável de saída é θ (ângulo da roda do veículo), conforme indicado na figura a seguir:



A base de regras, que constitui a estratégia de estacionamento do veículo, é dada em "forma matricial":

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	**PS**	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	PM	PM
LV	NB	NM	NS	PS	PM
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

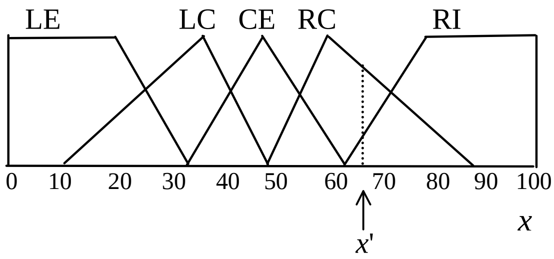
A leitura das regras a partir desta matriz é exemplificada para a célula sombreada (PS):

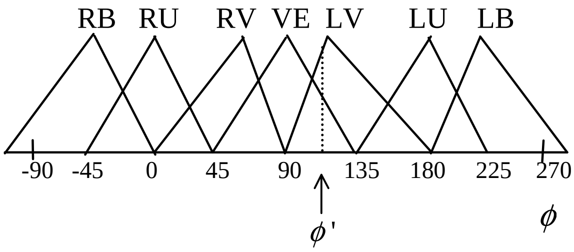
se (x é LE) e (ϕ é RB) *então* (θ é PS),

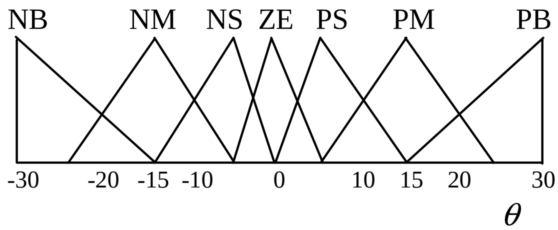
onde RB, LE e PS são os rótulos atribuídos aos conjuntos fuzzy que representam os valores linguísticos de cada variável (sete para as variáveis ϕ e θ, e cinco para a variável x).

Neste problema, considerar-se-á *min* para representar tanto a norma-t no modus ponens generalizado, como a implicação e o operador f_e que expressa a combinação dos antecedentes de cada regra (dois, neste caso). Para f_{ou} (união das regras) será utilizado o *max*.

Os conjuntos fuzzy correspondentes a cada uma das variáveis estão representados por suas funções de pertinência nas figuras a seguir. Os valores de x e ϕ em um determinado instante (ou situação) são: x' = 65 m; ϕ' = 113°.







As regras ativadas são aquelas com os seguintes antecedentes (com os graus de pertinência – aproximados – de *x*' e ϕ' nos conjuntos assinalados entre parênteses):

- para a variável *x*: RI (0,2) e RC (0,7)
- para a variável ϕ: LV (0,9) e VE (0,5)

Da base de regras, verifica-se que as regras concernentes a esta situação são as sombreadas:

ϕ \ x	LE	LC	CE	RC	RI
RB	PS	PM	PM	PB	PB
RU	NS	PS	PM	PB	PB
RV	NM	NS	PS	PM	PB
VE	NM	NM	ZE	**PM**	**PM**
LV	NB	NM	NS	**PS**	**PM**
LU	NB	NB	NM	NS	PS
LB	NB	NB	NM	NM	NS

De forma explícita:

se (*x* é RC) *e* (ϕ é VE) *então* (θ é PM) *ou*

se (*x* é RC) *e* (ϕ é LV) *então* (θ é PS) *ou*

se (*x* é RI) *e* (ϕ é VE) *então* (θ é PM) *ou*

se (*x* é RI) *e* (ϕ é LV) *então* (θ é PM)

Na expressão para a função de pertinência do conjunto fuzzy resultante para cada uma das regras ativadas deve-se levar em conta que, neste caso, há dois antecedentes, os quais devem ser combinados por *min* (conforme já especificado):

$$\mu_{B^*}(\theta) = (\mu_{A_1}(x') \wedge \mu_{A_2}(\phi')) \wedge \mu_B(\theta)$$

onde A_1 simboliza os valores (conjuntos fuzzy) da variável x, A_2, os da variável ϕ**,** e B, os da variável θ. Observe-se que ao conjunto B^* não corresponderá um rótulo pré-especificado. Para cada uma das regras ativadas tem-se, portanto:

$$\mu_{PM^*}(\theta) = (\mu_{RC}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{PM}(\theta) = (0{,}7 \wedge 0{,}5) \wedge \mu_{PM}(\theta) = 0{,}5 \wedge \mu_{PM}(\theta)$$

$$\mu_{PS^*}(\theta) = (\mu_{RC}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{PS}(\theta) = (0{,}7 \wedge 0{,}9) \wedge \mu_{PS}(\theta) = 0{,}7 \wedge \mu_{PS}(\theta)$$

$$\mu_{PM^*}(\theta) = (\mu_{RI}(x') \wedge \mu_{VE}(\phi')) \wedge \mu_{PM}(\theta) = (0{,}2 \wedge 0{,}5) \wedge \mu_{PM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{PM}(\theta)$$

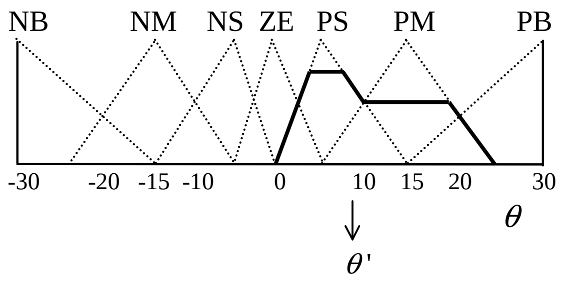
$$\mu_{PM^*}(\theta) = (\mu_{RI}(x') \wedge \mu_{LV}(\phi')) \wedge \mu_{PM}(\theta) = (0{,}2 \wedge 0{,}9) \wedge \mu_{PM}(\theta) = 0{,}2 \wedge \mu_{PM}(\theta)$$

A seguir é efetuada a *união das regras* acima, por meio do conectivo f_{ou}, que conforme especificado, é o *max*. Verifica-se que o conjunto de saída PM ocorre em três ocasiões e que, embora não seja imprescindível fazê-lo por escrito (bastaria ter isto em mente no procedimento gráfico), após a aplicação do operador *max* (ou da união) restarão para compor o conjunto fuzzy de saída:

$$\mu_{PM^*}(\theta) = 0{,}5 \wedge \mu_{PM}(\theta)$$

$$\mu_{PS^*}(\theta) = 0{,}7 \wedge \mu_{PS}(\theta)$$

Este resultado está mostrado na figura abaixo, onde θ' representa o valor após defuzzificação pelo *centro de gravidade* (aproximadamente):



A partir deste exemplo podem ser feitas algumas observações importantes. As formas adotadas para as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy têm mais relevância quando o método de defuzzificação é o do *centro de gravidade*, em contraposição ao da *média dos* *máximos*. Este, no exemplo acima, privilegiaria o conjunto fuzzy de saída PS; o valor de θ' seria *o mesmo que se obteria com apenas um regra ativada* (a de consequente PS). Na escolha de um método ou outro, deve-se decidir se é importante considerar as contribuições de todas as regras ativadas ou se é desejável levar em consideração apenas aquelas com maior grau de ativação. Cabe salientar, entretanto, que no exemplo foi considerada apenas uma situação particular, em um determinado instante de tempo, no processo de estacionamento de um veículo; em situações sucessivas, eventuais diferenças devidas à utilização de um ou outro método de defuzzificação podem se tornar pouco representativas no final.

O número de funções de pertinência foi estabelecido de forma arbitrária; um eventual mau desempenho no estacionamento do veículo poderia requerer um ajuste nesse número. É perfeitamente claro que o número de regras possíveis é função direta do número de conjuntos fuzzy considerados para cada antecedente (no exemplo em questão tem-se $5 \times 7 = 35$ regras possíveis). Quanto maior o número de conjuntos atribuídos aos antecedentes, maior a dificuldade de se estabelecer uma base de regras consistente. Um procedimentos automático de escolha do número conjuntos torna este problema menos relevante (ou menos penoso para o projetista), mas mesmo assim, há que considerar que uma base de regras muito grande acarreta um maior custo computacional. Além disso, fornece uma quantidade excessiva de informação ao usuário, que, ao optar por um sistema fuzzy, esperaria obter uma estratégia de ação interpretável, inclusive do ponto de vista linguístico.

Poderia ser necessário, também, um ajuste nas formas das funções de pertinência, que foram estabelecidas com base no *bom senso*. Por exemplo, verifica-se que o suporte do conjunto fuzzy de saída ZE é menor do que nos restantes. Isto se deve à busca por uma maior precisão quando se está próximo da situação final de um estacionamento correto (x "no centro" e ϕ "na vertical"). A regra *se* (x é CE) *e* (ϕ é VE) *então* (θ é ZE) indica que, nesta situação, as rodas não devem ser giradas (θ deve ser "zero"). Se o suporte de ZE fosse maior, a ação "zero" ocorreria para uma faixa maior de valores relativos à posição do veículo em um dado instante, correndo-se o risco de não tomar atitude corretiva quando necessário. Se o suporte de ZE fosse muito pequeno, este seria ativado somente em situações muito próximas do estacionamento final. Os conjuntos adjacentes a ZE responderiam, provavelmente de maneira alternada, pelo posicionamento das rodas, causando oscilações indesejáveis no final da trajetória.

Em resumo, o desempenho de um sistema de inferência fuzzy depende da escolha de uma base de regras adequada e do número e forma dos conjuntos atribuídos a cada variável. Pode-se inserir aí também a escolha do operador de implicação e do método de defuzzificação, que também pode se valer de procedimentos automáticos (via algoritmos genéticos, por exemplo).

4. COMENTÁRIOS FINAIS

Neste texto foram apresentados, de modo sucinto, os conceitos fundamentais de Conjuntos Fuzzy e uma introdução à Logica Fuzzy e a mecanismos de inferência fuzzy. O sistema de inferência fuzzy aqui abordado é do tipo inicialmente concebido por Zadeh e outros pesquisadores, entre os quais E.H. Mamdani, que deu início a aplicações de caráter prático na década de 70[c]. Em virtude disso, este tipo de sistema de inferência é muitas vezes referenciado, hoje em dia, como sendo *do tipo Mamdani*.

Após os trabalho iniciais de Mamdani e associados, surgiram inúmeras outras aplicações de lógica fuzzy em Controle, inclusive em escala industrial. Uma das mais bem sucedidas vem sendo utilizada até hoje em plantas de produção de cimento, onde controladores fuzzy são usados para fornecer sinais de referência para controladores do tipo PID, ou seja, aqueles não atuam diretamente sobre a planta, mas em um nível hierárquico superior. O sucesso desta aplicação deveu-se em muito ao fato de os operadores humanos (especialistas) terem sido capazes de traduzir consistentemente, em termos de regras linguísticas, as atitudes que tomavam no ajuste dos sinais de referência para os controladores PID.

Um outro sistema de inferência que se tornou extremamente bem sucedido foi concebido por H. Takagi e M. Sugeno[d], o qual difere do de Mamdani na parte do consequente, que é uma função linear das variáveis dos antecedentes: se x_1 é A_1 e x_2 é A_2 , então $z = f(x_1, x_2)$. A função f é, em geral, um *polinômio* e o sistema de inferência é geralmente referenciado em função do grau deste polinômio. Por exemplo: em um *sistema de inferência Takagi-Sugeno* de ordem *zero* a saída z é uma constante, o que é equivalente a um sistema Mamdani com um

[c] Mamdani, E.H. (1974). "Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Plant". *Proceedings of the IEE* (Control and Science), Vol. 121: 298-316.

[d] Takagi, T. & Sugeno, M. (1985). "Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modelling and Control". *IEEE Trans. on Systems, Man & Cybernetics*, Vol. 15: 116-132.

singleton como consequente. Essencialmente, num sistema Takagi-Sugeno deste tipo, o espaço não linear é subdividido em várias regiões lineares, o que evidentemente facilita o projeto.

Conforme afirmado anteriormente, os sistemas de inferência fuzzy tiveram suas aplicações iniciais concentradas na área de Controle, onde se procurava modelar por meio de regras linguísticas o modo aproximado de raciocínio, tentando imitar a habilidade humana de tomar decisões racionais em um ambiente de incerteza e imprecisão. Posteriormente, a gama de aplicações cresceu consideravelmente, principalmente quando os sistemas de inferência fuzzy se tornaram também capazes de lidar com o conhecimento objetivo – expresso em dados numéricos, por exemplo. Um passo importante neste sentido foi o aparecimento dos sistemas híbridos neuro-fuzzy, onde um sistema de inferência fuzzy é estruturado segundo uma rede neural, cujas camadas correspondem às diversas fases do processo de inferência. Esta hibridização faz uso da capacidade de aprendizado das redes neurais para a sintonia dos parâmetros de sistemas fuzzy, facilitando bastante o seu projeto e permitindo aplicações de sucesso em áreas como classificação e previsão de séries temporais.

A utilidade da teoria de conjuntos fuzzy em reconhecimento de padrões e análise de *clusters* foi reconhecida desde os anos 60 e atualmente a literatura a respeito é bastante vasta. Os livros listados na Bibliografia contêm inúmeras referências a esses assuntos.

Dentre os vários tipos de conjuntos fuzzy, aqueles definidos no conjunto dos números reais têm um significado especial. Funções de pertinência destes conjuntos têm um significado claramente quantitativo e podem, sob certas condições, ser vistos como *números fuzzy*. Operações com números fuzzy deram origem à *aritmética fuzzy*, que se constitui numa ferramenta básica em raciocínio aproximado. Números fuzzy são também utilizados na formulação de problemas de programação linear fuzzy, de previsão e planejamento.

Quanto a *softwares* para auxílio ao projeto e implementação de sistemas fuzzy, existe a *Fuzzy Toolbox* do *Matlab*© e inúmeros outros dedicados a determinados tipos de aplicações, como, por exemplo, os desenvolvidos na Universidade de Magdeburg (NEFCON©, NEFCLASS© e NEFPROX© e outros), disponíveis para *download* em http://fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/.

A bibliografia apresentada a seguir é apenas uma pequena amostra do vasto número de publicações sobre o assunto que se convencionou denominar Lógica Fuzzy, mas que é muito mais amplo do que isto. Grande parte dos livros listados têm muitos tópicos em comum, às vezes com enfoques diferentes do ponto de vista formal; todos eles contêm listas completas de referências a publicações relevantes na área de sistemas fuzzy. Não haveria sentido, portanto, em apresentar aqui uma extensa lista destas publicações; são mencionadas apenas algumas das que são consideradas importantes como motivadores de determinadas abordagens ou aplicações (além das já citadas em notas de rodapé) .

5. BIBLIOGRAFIA

Livros:

- Altrock, C. (1995). *Fuzzy Logic & Neuro-Fuzzy Applications Explained*, Prentice-Hall.
- Driankov, D., Hellendoorn, H., Reinfrank, M. (1993). *An Introduction to Fuzzy Control*. Springer-Verlag.
- Dubois, D. & Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Fuzzy Systems: Theory and Applications*, Academic Press.
- Klir, G. J. & Folger, T. A. (1988). *Fuzzy Sets, Uncertainty and Information*, Prentice Hall.
- Klir, G. J. & Yuan, B. (1995). *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic – Theory and Applications*. Prentice Hall.
- Lin, C-T. & Lee, C.S. G. (1996). *Neural Fuzzy Systems*, Prentice Hall.
- Pedrycz, W. & Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design.* MIT Press.
- Zimmermann, H-J. (1994). *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* 2nd Edition, Kluwer Academic Publishers.

Tutoriais:

- Gomide, F., Gudwin, R., Tanscheit, R. (1995). Conceitos Fundamentais da Teoria de Conjuntos Fuzzy, Lógica Fuzzy e Aplicações. *Proc. 6th IFSA Congress -Tutorials*, pp. 1-38, São Paulo, Brasil.
- Mendel, J. M. (1995). "Fuzzy Logic Systems for Engineering: a Tutorial". *Proc. IEEE*, Vol. 83: 345-377.

Artigos pioneiros

- Baldwin, J.F. (1979). "A New Approach to Approximate Reasoning using a Fuzzy Logic". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol 2:309-325
- Belmann, R.E. & Zadeh, L.A. (1970). "Decision Making in a Fuzzy Environment". *Management Science*, Vol. 17: 141-164.
- Kickert, W.J.M. & Van Nauta Lemke, H.R. (1976). "The Application of a Fuzzy Controller In a Warm Water Plant". *Automatica*, Vol. 12: 301-308.
- Mamdani, E.H. & Assillan, S. (1975). "An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller". *International Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 7: 1-13.
- Mamdani, E.H., (1977). "Applications of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning using Linguistic Synthesis", *IEEE Trans. Computers*, Vol. 126: 1182-1191.
- Gaines, B. R. , (1976). "Foundations of Fuzzy Reasoning". *Int. Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 8: 623-668.
- Sugeno, M. & Kang, G.T. (1986). "Fuzzy Modelling and Control of Multilayer Incinerator". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 18: 329-346.
- Zadeh, L.A. (1973). "Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes". *IEEE Trans. on Systems Man & Cybernetics*, Vol.3: 28-44.
- Zadeh, L.A. (1976). "A Fuzzy Algorithmic Approach to the Definition of Complex or Imprecise Concepts". *Int. Journal of Man-Machine Studies*, Vol. 8:249-291.
- Zadeh, L.A. (1976). "Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility". *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 1: 3-28.