INE5403 - Fundamentos de Matemática Discreta para a Computação

5) Relações

- 5.1) Relações e Dígrafos
- 5.2) Propriedades de Relações
- 5.3) Relações de Equivalência
- 5.4) Manipulação de Relações
- 5.5) Fecho de Relações

Relações

- Ligações entre elementos de conjuntos são representadas utilizando uma estrutura chamada ***relação***.

- Relações podem ser usadas para resolver problemas tais como:
  - Determinar quais pares de cidades são ligadas por linhas aéreas em uma rede
  - Busca de uma ordem viável para as diferentes fases de um projeto
  - Elaboração de um modo útil de armazenar informação em bancos de dados computacionais

Relações

<u>Definição</u>: Um par ordenado (a,b) é uma lista de objetos a e b em uma ordem estabelecida, com a aparecendo em primeiro e b em segundo.

– dois pares ordenados (a_1,b_1) são ditos iguais (a_2,b_2) se e somente se $a_1=a_2$ e $b_1=b_2$.

<u>Definição</u>: Se A e B são dois conjuntos não-vazios, define-se o produto cartesiano $A\times B$ como o conjunto de *todos* os pares ordenados (a,b), com $a\in A$ e $b\in B$:

$$A\times B = \{(a,b) \mid a\in A \text{ e } b\in B\}$$

<u>Exemplo</u>: $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{r,s\}$

$$A\times B = \{(1,r),(1,s),(2,r),(2,s),(3,r),(3,s)\}$$

Relações

Exemplo: Uma firma de pesquisa em marketing classifica uma pessoa de acordo com 2 critérios:

1. sexo: m=masculino ; f=feminino
2. grau de escolaridade:
   g=ginásio; m=médio; f=faculdade; p=pós-graduação

- sejam S={m,f} e L={g,m,f,p}
- $S \times L$ contém todas as categorias de classificação (8)
- (f,f) representa mulheres que completaram a faculdade

- Obs.: para quaisquer conjuntos finitos não-vazios A e B, temos:

$$|A \times B| = |A|.|B|$$

Relações

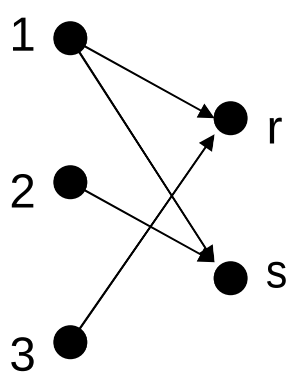
<u>Definição</u>: Sejam A e B conjuntos. Uma *relação binária* R de A em B é um subconjunto de $A \times B$.

- Ou: uma relação binária de A em B é um conjunto R de pares ordenados, onde o 1º elemento de cada par vem de A e o 2º vem de B, ou seja, $R \subseteq A \times B$.
- Quando $(a,b) \in R$, diz-se que *a está relacionado com b* por R.
- Usa-se a notação $a\ R\ b$ para denotar que $(a,b) \in R$.
- Se a não está relacionado com b por R, escreve-se $a \not R\ b$.
- Relações binárias representam ligações entre elementos de 2 conjuntos.
  - veremos também relações n-árias
  - vamos omitir a palavra “binária”

Relações

Exemplo: Sejam A={1,2,3} e B={r,s}.

- R={(1,r),(1,s),(2,s),(3,r)} é uma relação de A em B.
- Pode-se dizer: 1 R r, 1 R s, 2 R s, 3 R r
- Mas: $3 \not R\, s$
- Esta relação também pode ser representada por:



R	r	s
1	×	×
2		×
3	×	

Relações

Exemplo: Seja A=B={1,2,3,4,5}. Define-se a relação R (menor do que) sobre A como:

- a R b se e somente se $a<b$.
- Neste caso: R={(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}

Exemplo: Seja A o conjunto de todas as cidades e seja B o conjunto dos 3 estados da região sul do Brasil.

- $(a,b) \in R$ se a cidade a está no estado b
- Por exemplo, (Florianópolis, SC), (Maringá, PR), (Curitiba,PR) e (Porto Alegre,RS) estão em R.

Relações

- Observe que o que realmente importa em uma relação é que nós saibamos precisamente quais elementos em A estão relacionados a quais elementos em B.

  Exemplo: A={1,2,3,4}   e R é uma relação de A em A.

  – Se sabemos que 1 R 2, 1 R 3, 1 R 4, 2 R 3, 2 R 4 e 3 R 4, então nós sabemos tudo que é preciso saber sobre R

  – Na verdade, R é a relação < (menor do que), mas isto nós não precisamos saber: a lista já é suficiente.

  – Podemos então escrever:
    R={(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}
    pois R é completamente determinada pela lista de pares.

Relações sobre um conjunto

Definição: Uma *relação sobre o conjunto A* é uma relação de A para A.

– ou seja, é um subconjunto de $A \times A$.

Exemplo: Seja A o conjunto {1,2,3,4}. Quais pares ordenados estão na relação R={(a,b) | a divide b}?

R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)}

Note que:

$A \times A$={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4), (3,1), (3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)}

Relações sobre um conjunto

<u>Exemplo</u>: Considere as seguintes relações sobre o conjunto dos inteiros:

$R_1 = \{ (a,b) \mid a \leq b \}$
$R_2 = \{ (a,b) \mid a > b \}$
$R_3 = \{ (a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b \}$
$R_4 = \{ (a,b) \mid a = b \}$
$R_5 = \{ (a,b) \mid a = b+1 \}$
$R_6 = \{ (a,b) \mid a+b \leq 3 \}$

Quais destas relações contêm cada um dos pares (1,1),(1,2),(2,1),(1,-1) e (2,2)?

<u>Resp.</u>: (1,1) está em R_1, R_3, R_4 e R_6
(1,2) está em R_1 e R_6
(2,1) está em R_2, R_5 e R_6
(1,-1) está em R_2, R_3 e R_6
(2,2) está em R_1, R_3 e R_4

Relações sobre um conjunto

- Quantas relações podem ser construídas sobre um conjunto com n elementos?
  - Uma relação sobre A é um subconjunto de $A \times A$
  - $A \times A$ tem n^2 elementos
  - Um conjunto com m elementos tem 2^m subconjuntos
  - Logo, há 2^{n^2} subconjuntos de $A \times A$
  - O que significa que há 2^{n^2} relações possíveis sobre um conjunto com n elementos.

Conjuntos originados de relações

Definição: Seja $R \subseteq A \times B$ uma relação de A em B. Então:

a) ***Domínio*** de R, denotado por Dom(R):

- Conjunto dos elementos em A que estão relacionados com algum elemento em B

- ou: Dom(R) é o subconjunto de A formado por todos os primeiros elementos nos pares que aparecem em R

b) ***Contradomínio*** de R, denotado por Ran(R):

- Conjunto dos elementos em B que são segundos elementos de pares de R

- ou: Ran(R) é o conjunto de todos os elementos em B que são relacionados a algum elemento em A

- ou seja: elementos de A que não estão em Dom(R) não estão envolvidos na relação R de modo algum
  - idem para elementos de B que não estão em Ran(R)

Conjuntos originados de relações

Exemplo: Se R é a relação sobre A={1,2,3,4,5} dada por a R b se e somente se a<b, então:

Dom(R) = {1,2,3,4}

Ran(R) = {2,3,4,5}

Nota: R = {(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}

Conjuntos originados de relações

Definição: Se $x \in A$, define-se o conjunto $R(x)$ dos ***R-relativos de x*** como sendo o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por R ($x\, R\, y$).

- ou seja: $R(x) = \{\, y \in B \mid x\, R\, y \,\}$

Definição: Similarmente, se $A_1 \subseteq A$, então $R(A_1)$, o conjunto dos ***R-relativos de A_1*** é o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por R com $x \in A_1$.

- ou seja: $R(A_1) = \{\, y \in B \mid x\, R\, y \text{ para algum } x \in A_1 \,\}$

Obs.: note que $R(A_1)$ é a união dos conjuntos $R(x)$, onde $x \in A_1$

Conjuntos R-relativos

Exemplo: Seja A=B={a,b,c,d} e seja

R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,a),(d,c),(c,b)}

Então:

R(a) = {a,b}

R(b) = {c}

se A_1={c,d}, então R(A_1)={a,b,c}

Dom(R) = {a,b,c,d}

Ran(R) = {a,b,c}

Operações em conjuntos R-relativos

Teorema: Seja R uma relação de A em B e sejam A_1 e A_2 subconjuntos de A. Então:

a) Se $A_1 \subseteq A_2$, então $R(A_1) \subseteq R(A_2)$

b) $R(A_1 \cup A_2) = R(A_1) \cup R(A_2)$

c) $R(A_1 \cap A_2) \subseteq R(A_1) \cap R(A_2)$

Exemplo: Seja A=B=Z, seja R a relação $\leq$, e sejam $A_1=\{0,1,2\}$ e $A_2=\{9,13\}$. Então:

- $R(A_1)$ consiste de todos os n tais que $0\leq n$ ou $1\leq n$ ou $2\leq n$.
- Portanto, $R(A_1)=\{0,1,2,\ldots\}$
- Similarmente, $R(A_2)=\{9,10,\ldots\}$
- De modo que $R(A_1)\cap R(A_2)=\{9,10,\ldots\}$
- Entretanto, $A_1\cap A_2=\emptyset$, o que indica que $R(A_1\cap A_2)=\emptyset$

Conjuntos originados de relações

- Note que os conjuntos R(a), para a em A, determinam completamente uma relação R.
- **Teorema**: Sejam R e S relações de A em B. Se $R(a)=S(a)$ para todo $a \in A$, então $R=S$.
- **Prova**:
  - Se a R b, então $b \in R(a)$. Portanto, $b \in S(a)$ e a S b. ($R \subseteq S$)
  - Se a S b, então $b \in S(a)$. Portanto, $b \in R(a)$ e a R b. ($S \subseteq R$)
  - Logo, $R=S$

Representando relações

- Há muitas maneiras de representar uma relação entre conjuntos finitos.
- Uma maneira é listar os pares ordenados.
- Também se pode usar:
  - matrizes de zeros e 1's
  - grafos direcionados (dígrafos)

Matrizes de relações

<u>Definição</u>: Se $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ e $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$ são conjuntos finitos e R é uma relação de A em B, então R pode ser representada pela matriz $m \times n$ $M_R=[m_{ij}]$, definida como:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{se} \quad (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

- M_R é denominada de *<u>matriz de R</u>*

<u>Exemplo</u>: Sejam A={1,2,3} e B={r,s} e a relação R de A em B dada por R={(1,r),(2,s),(3,r)}. Então a matriz M_R de R é:

$$M_{R(3\times 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes de relações

<u>Exemplo</u>: Defina a relação representada pela matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Solução</u>: Como M é 3×4, fazemos:

$A=\{a_1,a_2,a_3\}$ e $B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$

– Então, como $(a_i,b_j) \in R$ se e somente se $m_{ij}=1$, temos:

$R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_4),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_3,b_1),(a_3,b_3)\}$

Representação de relações com dígrafos

- **<u>Definição</u>**: Se A é um conjunto finito e R é uma relação sobre A, então R pode ser representada graficamente como segue:
  - desenhe um pequeno círculo para cada elemento de A e o nomeie com o correspondente elemento de A $\rightarrow$ *vértices*
  - desenhe uma linha orientada, chamada de *aresta*, do vértice a_i para o vértice a_j se $(a_i, a_j) \in R$

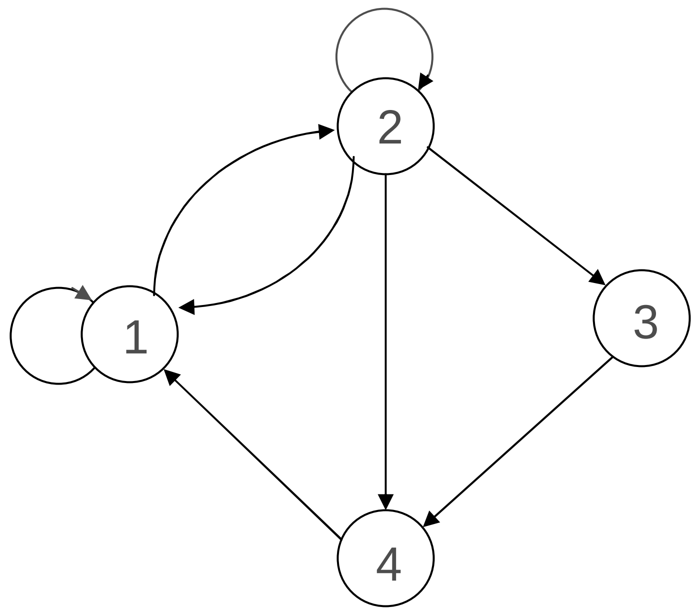
  A representação gráfica que resulta é chamada de "grafo direcionado" ou *<u>dígrafo</u>* de R.

- Portanto, se R é uma relação sobre A, as arestas do dígrafo de R correspondem exatamente aos pares em R e os vértices correspondem aos elementos do conjunto A.

Representação de relações usando dígrafos

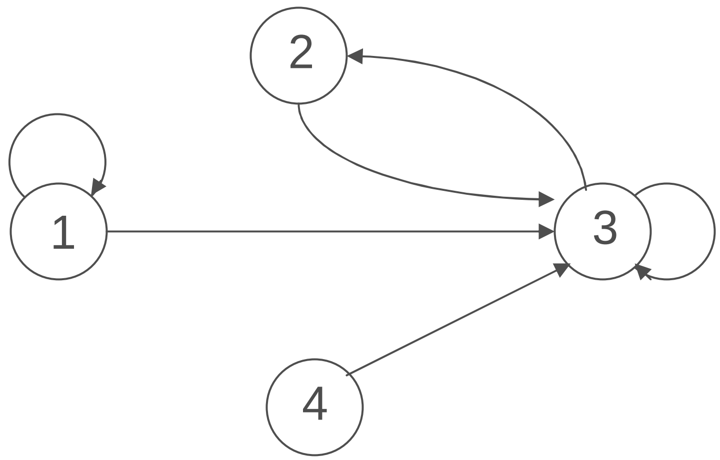
Exemplo: Sejam A={1,2,3,4} e
R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1)}

– O dígrafo de R é:



Representação de relações usando dígrafos

Exemplo: Encontre a relação determinada pela figura abaixo:



Solução:

R={(1,1),(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(4,3)}

Representação de relações usando dígrafos

- Note que dígrafos nada mais são do que representações geométricas de relações.

  $\Rightarrow$ qualquer afirmação feita a respeito de um dígrafo é na verdade uma afirmação sobre a relação correspondente.

- Isto é especialmente importante para teoremas sobre relações e suas provas:

  - frequentemente é mais fácil ou mais claro estabelecer um resultado em termos gráficos, mas a prova vai sempre estar ligada à relação associada.

Relações e dígrafos

Definição: Se R é uma relação sobre um conjunto A e $a \in A$, então:

i) O *grau de entrada de a* (com relação a R) é o número de elementos $b \in A$ tais que $(b,a) \in R$.

ii) O *grau de saída de a* é o número de elementos $b \in A$ tais que $(a,b) \in R$.

– Note que o grau de saída de a é $|R(a)|$

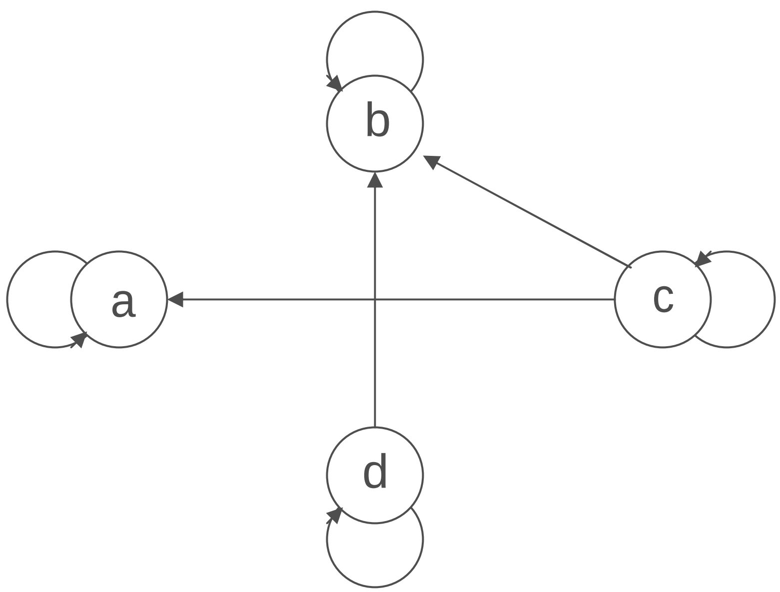
Relações e dígrafos

Exemplo: Seja A={a,b,c,d} e seja R uma relação sobre A que tenha como matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Construa o dígrafo de R e liste os graus de entrada e de saída dos vértices.

Resp.: R={(a,a),(b,b),(c,a),(c,b),(c,c),(d,b),(d,d)}



vértice	a	b	c	d
grau de entrada	2	3	1	1
grau de saída	1	1	3	2

Caminhos em relações e dígrafos

<u>Definição</u>: Seja R uma relação sobre o conjunto A. Um *<u>caminho de comprimento n</u>* em R de a para b é uma seqüência finita $\pi = a, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, b$ tal que:

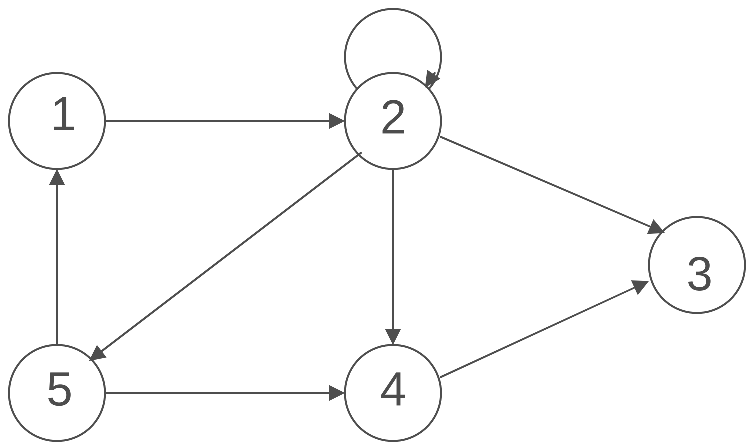
$$a\ R\ x_1,\ x_1\ R\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_{n-1}\ R\ b$$

- Note que um caminho de comprimento n envolve n+1 elementos de A (não necessariamente distintos).

- O modo mais fácil de visualizar um caminho é com o dígrafo de uma relação:
  sucessão de arestas, seguindo os sentidos indicados.

Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo: Considere o dígrafo:



Então:

π_1 = 1,2,5,4,3 é um caminho de comprimento 4 de 1 a 3

π_2 = 1,2,5,1 é um caminho de comprimento 3 do vértice 1 para ele mesmo

π_3 = 2,2 é um caminho de comprimento 1 do vértice 2 para ele mesmo

Caminhos em relações e dígrafos

- Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de um *ciclo* (π_2 e π_3 são ciclos).
- Caminhos de comprimento 1 podem ser identificados pelos pares ordenados (x,y) que pertencem a R.
- Caminhos em relações R podem ser usados para definir novas relações bastante úteis.

Definição: (relação R^n sobre A)

x R^n y significa que há um *caminho de comprimento n* de x até y em R.

Definição: (relação R^∞ sobre A)

x R^∞ y significa que há algum caminho em R de x até y.

(R^∞ é chamada de *relação de conectividade* para R)

Caminhos em relações e dígrafos

- Note que $R^n(x)$ consiste de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de x por meio de um caminho em R de comprimento n.
- O conjunto $R^\infty(x)$ consiste de todos os vértices que podem ser alcançados a partir de x por meio de ***algum*** caminho em R.

Exemplo1: Seja A o conjunto de todos os seres humanos vivos e seja R a relação "conhecimento mútuo" (a R b significa que a e b se conhecem). Então:

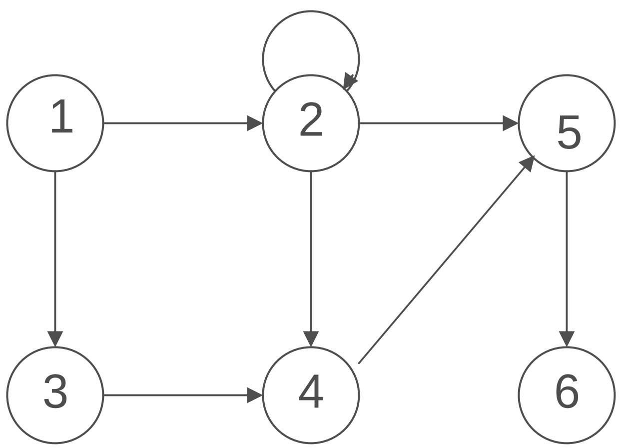
- A R^2 b significa que a e b têm um conhecido em comum.
- Em geral, a R^n b se a conhece alguém (x_1), que conhece x_2, ..., que conhece x_{n-1}, que conhece b.
- Finalmente, a R^∞ b significa que existe alguma lista encadeada de conhecidos que começa em a e termina em b.
- Questão: será que toda dupla de brasileiros está relacionada por R^∞?

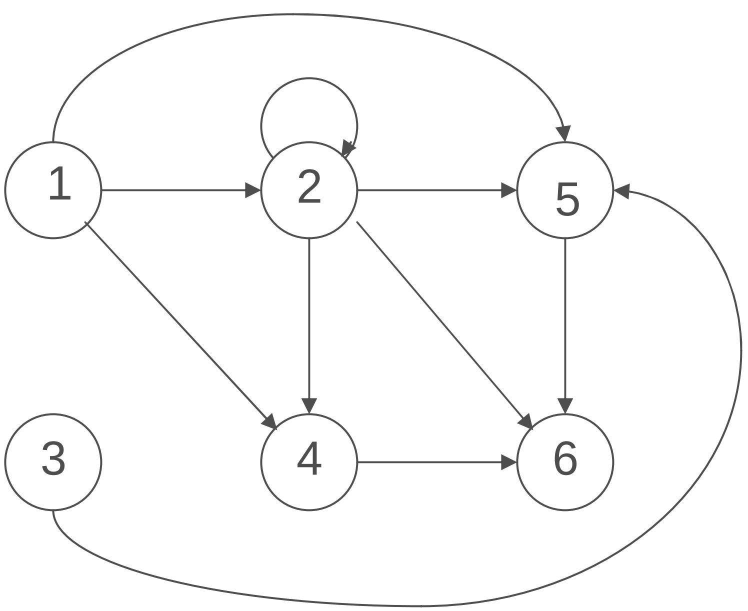
Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo2: Seja A o conjunto de cidades brasileiras, e seja x R y se há algum vôo direto (de alguma cia aérea) de x para y.

- x e y estão relacionados por R^n se for possível agendar um vôo de x para y com exatamente n-1 paradas intermediárias
- x R^∞ y se for possível ir de avião de x para y.

Exemplo3: Seja A={1,2,3,4,5,6} e sejam os dígrafos das relações R e R^2 sobre A dados por:





Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo3 (cont.):

- Uma linha conecta 2 vértices no dígrafo para R_2 somente se existir um caminho de comprimento 2 conectando os mesmos vértices no dígrafo para R_1.

- Portanto:

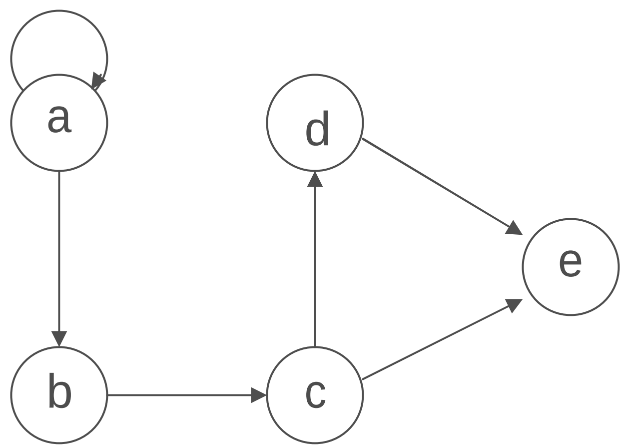
  $1\ R^2\ 2$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 2$
  $1\ R^2\ 4$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 4$
  $1\ R^2\ 5$ porque $1\ R\ 2$ e $2\ R\ 5$
  $2\ R^2\ 2$ porque $2\ R\ 2$ e $2\ R\ 2$
  e assim sucessivamente.

- De um modo similar, podemos construir o dígrafo de R^n para qualquer n.

Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo4: Sejam A={a,b,c,d,e} e
R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,e),(c,d),(d,e)}.
Compute (a) R^2 (b) R^∞

Solução: o dígrafo de R é dado por:



(a) Portanto: R^2 = {(a,a),(a,b),(a,c),(b,e),(b,d),(c,e)}

Caminhos em relações e dígrafos

Exemplo4 (cont.):

(b) R^∞ = "todos os pares ordenados de vértices para os quais há um caminho de qualquer comprimento do primeiro vértice para o segundo"

ou seja:

$R^\infty = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,c),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e),(d,e)\}$

– Por exemplo, $(a,d) \in R^\infty$, já que há um caminho de comprimento 3 de a para d: "a,b,c,d".

– Similarmente, $(a,e) \in R^\infty$, já que há um caminho de comprimento 3 de a para e: "a,b,c,e" (assim como "a,b,c,d,e")

Produto booleano

<u>Exemplo</u>: Encontre o produto booleano de A e B, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix}$$

Caminhos em relações e matrizes

Exemplo: Sejam A e R como no exemplo anterior. Então:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2,4)

$$\Rightarrow M_{R^2} = M_R \otimes M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee \boxed{(1 \wedge 1)} \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0)$$

Caminhos em relações e matrizes

- Seja R uma relação sobre $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ e seja M_R uma matriz $n\times n$ representando R.

<u>Teorema</u>: Se R é uma relação sobre $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ então:

$$M_{R^2} = M_R \otimes M_R$$

<u>Prova</u>:

- Seja $M_R=[m_{ij}]$ and $M_{R^2}=[n_{ij}]$;
- o elemento n_{ij} de $M_R \otimes M_R$ será = 1 se a <u>*linha i*</u> do 1º M_R e a <u>*coluna j*</u> do 2º M_R tiverem um nº 1 na mesma posição relativa (digamos k);
- ou seja, $n_{ij}=1$ se $m_{ik}=1$ e $m_{kj}=1$ para algum k

  $\Rightarrow$ se $n_{ij}=1$, então $a_i \, R \, a_k$ e $a_k \, R \, a_j$
- portanto, $n_{ij}=1 \Rightarrow a_i \, R^2 \, a_j$.

Caminhos em relações e matrizes

- Esta idéia pode ser generalizada:

<u>Teorema</u>: Para n ≥ 2 e para uma relação R sobre A, temos:

$$M_{R^n} = M_R \otimes M_R \otimes \ldots \otimes M_R \quad \text{(n fatores)}$$

Caminhos em relações e matrizes

- Exercício: Para a relação R cujo dígrafo é dado abaixo,

  a) Desenhe os dígrafos de R^2 e R^∞
  b) Encontre $M_R{}^2$ e $M_R{}^\infty$