Teoria dos Conjuntos

- Pode-se dizer que a Teoria dos Conjuntos é em grande parte trabalho de um único matemático: Georg Cantor (1845-1918).
- A noção de conjunto não é suscetível de definição precisa a partir d noções mais simples, ou seja, é uma noção primitiva.
- É de fundamental importância para várias áreas da ciência da computação:
  – Teoria dos Números
  – Banco de Dados
  – Linguagens Formais, etc

Teoria dos Conjuntos

- Conceitos Primeiros

1. Conjunto – Notação: Letras Maiúsculas
   – Um conjunto é uma coleção bem definida de entidades ou objetos (chamados de membros ou elementos do conjunto), considerados globalmente e que pode ser identificada.
   – Ou, "coleção não-ordenada de objetos".
   – Obs.: muitas vezes, todos os objetos em um conjunto gozam de uma mesma propriedade.
   – Exemplos:
     - Conjunto de livros na biblioteca da UFSC (conj. finito)
     - Conjunto dos números naturais (conj. infinito)
     - Conjunto de dinossauros vivos (conj. vazio, {}, Ø)
     - Conjunto L de dois elementos, um dos quais é o conjunto das vogais e outro é o conjunto das consoantes.

Teoria dos Conjuntos

- Conceitos Primeiros

2. Elemento – Notação: letras minúsculas
   - Os objetos que constituem um conjunto denominam-se elementos do conjunto.
   - Exemplos:
     - José é um elemento do conjunto de Catarinenses.
     - 1 é um elemento do conjunto dos Números Naturais.
     - -2 é elemento do conjunto solução da equação $x^2 - 4 = 0$.
     - {a, e, i, o, u} é elemento do conjunto formado pelo conjunto as vogais e pelo conjunto das consoantes.

Teoria dos Conjuntos

- Conceitos Primeiros

3. Pertinência – Notação: $\in$
   – Qualquer objeto que seja elemento de um conjunto é dito pertencer aquele conjunto, ou ainda, o elemento x possui o predicado P.
   – Se o elemento x não pertence ao conjunto, denota-se por $\notin$ que também pode ser equivalente a dizer que x não está no conjunto, ou ainda que x não possui o predicado P.
4. Conjunto Universo – Notação: U
   – Chama-se Conjunto Universo ou simplesmente Universo de uma Teoria a todos os entes que são considerados como elementos nesta Teoria.
   – Exemplo: em geometria o Universo é o conjunto de todos os pontos.

Teoria dos Conjuntos

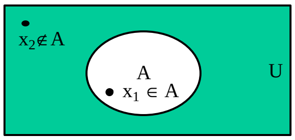
- Características dos Conjuntos
  – A **ordem** em que os elementos são listados em um conjunto é irrelevante: {3, 2, 1} = {1, 2, 3}.
  – A **repetição** dos elementos em um conjunto é irrelevante: {1, 1, 1, 3, 2, 2} = {1, 2, 3}.
- Maneiras de Descrever um Conjunto
  – De maneira explícita: A={água, terra, fogo, ar}
  – Indicando um padrão: (normalmente para conjuntos infinitos) P={2, 4, 6, 8, ...}
  – Por recursão:
    1. $2 \in S$
    2. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$

Teoria dos Conjuntos

- Maneiras de Descrever um Conjunto
  – Através de uma propriedade que os elementos do conjunto tenham em comum: (usa-se um predicado P(x) para denotar a propriedade P referente a uma variável x)
    - $S = \{x \mid P(x)\}$
    - $\forall x(x \in S \wedge P(x))$
  – Exemplos:
    - A={x|x é um inteiro e 3 < x < 7}
    - S={x|x é solução para $x^2 - 4 = 0$}

Teoria dos Conjuntos

- Maneiras de Descrever um Conjunto
  - Através de um Diagrama de Venn
    - Afim de facilitar o entendimento de certas definições e demonstrações da Teoria dos Conjuntos é útil a representação de um conjunto por um recinto plano delimitado por uma linha fechada qualquer não entrelaçada. Os elementos do conjuntos são os pontos internos ao recinto, enquanto os elementos que não pertencem ao conjunto são pontos externos ao recinto.



Teoria dos Conjuntos

- Conjuntos Especiais
  - N: conjunto dos n^{os} naturais: {0, 1, 2, 3, ...}
  - Z: conjunto dos n^{os} inteiros: {..., -2, -1, 0, 1, 2, ...}
  - Z*: conjunto dos n^{os} inteiros positivos {1, 2, 3, ...}
  - Q: conjunto dos n^{os} racionais: $\{x | x=n/m,\ m,\ n \in Z \wedge m \neq 0\}$
  - R: conjunto dos n^{os} reais: {x | x é um número real}

Teoria dos Conjuntos

- Igualdade de Conjuntos
  - Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence também a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertencer a A.
  - $A=B \leftrightarrow \forall x\ ((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A))$
- Desigualdade de Conjuntos
  - Se existe elemento de A que não pertence a B ou existe elemento de B que não pertence a A, então diz-se que A não é igual a B.
  - $A \neq B \leftrightarrow \exists x\ ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B))$

Teoria dos Conjuntos

- Subconjuntos
  - O conjunto A é dito um subconjunto de B se e somente se todo elemento de A é também um elemento de B.
  - $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$
  - Diz-se que A está contido em B.
  - Se A não está contido em B, escreve-se $A \not\subset B$.
- Subconjunto Próprio
  - Se A é um subconjunto de B, mas queremos enfatizar que $A \neq B$, escrevemos $A \subset B$ e dizemos que A é um subconjunto próprio de B.
  - $A \subset B \leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\ ((x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B))$

Teoria dos Conjuntos

- Subconjuntos (Exemplos)
  - Sejam os conjuntos:
    A={1, 7, 9, 15}
    B={7, 9}
    C={7, 9, 15, 20}

$B \subseteq C$	$15 \in C$
$B \subseteq A$	$\{7, 9\} \subseteq B$
$B \subset A$	$\{7\} \subset A$
$A \not\subset C$	$\varnothing \subseteq C$

  - Seja A um conjunto e seja B={A,{A}}

$A \in B$ e $\{A\} \in B$
$\{A\} \subseteq B$ e $\{\{A\}\} \subseteq B$
$A \not\subset B$

Teoria dos Conjuntos

- Subconjuntos (Propriedades)
  - Reflexiva:
    $A \subseteq A$
  - Transitiva:
    $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow (A \subseteq C)$

$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in C) \therefore \forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$
$\forall x(A(x) \rightarrow B(x)) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow C(x)) \therefore \forall x(A(x) \rightarrow C(x))$

Prova:

1.	$\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$	P
2.	$\forall x(B(x) \rightarrow C(x))$	P
3.	$A(a) \rightarrow B(a)$	1 EU
4.	$B(a) \rightarrow C(a)$	2 EU
5.	$A(a) \rightarrow C(a)$	3,4 SH
6.	$\forall x(A(x) \rightarrow C(x))$	5 IU

Teoria dos Conjuntos

- **Outros Conjuntos Especiais**
- Conjunto Vazio:
  - Um conjunto que não contenha nenhum elemento é chamado de Conjunto Vazio - ∅.
  - O conjunto vazio está contido (é subconjunto de qualquer conjunto).
- Conjunto Potência:
  - Dado qualquer conjunto A, sabemos que o conjunto vazio e o conjunto A são ambos subconjuntos de A.
  - Podemos definir TODOS os subconjuntos de A da seguinte forma:
  - Para um conjunto A, o conjunto formado por todos os subconjuntos de A é chamado de Conjunto Potência de A.
  - É denotado por 2^A, ou P(A), ou ainda ρ(A)

Teoria dos Conjuntos

- Conjunto Potência:
  - Exemplo: Seja A={1,2,3}. Então P(A) consiste de todos os subconjuntos de A; P(A)={Ø,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}
  - Obs.: Se A tem n elementos, P(A) tem 2^n elementos.

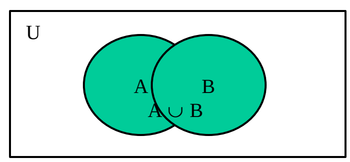
Teoria dos Conjuntos

- Seqüências:
  - Como os conjuntos não são ordenados, uma estrutura diferente é necessária para representar coleções ordenadas.
  - Tomemos o conjunto S={1,2,3} e seu conjunto potência P(S)={Ø,{1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}
  - Podemos utilizar uma representação binária para representar distintamente os subconjuntos de um conjunto.
  - Os diversos subconjuntos do conjunto S podem ser representados:

    Ø $=B_{000}$, {1}$=B_{100}$, {2}$=B_{010}$, {1,3}$=B_{101}$, {2,3}$=B_{011}=B_{11}$, B{1,2,3}$=B_{111}$
  - Onde os índices de B contém 1 ou 0 se a respectiva posição do conjunto original em relação ao subconjunto possuir o elemento ou não.

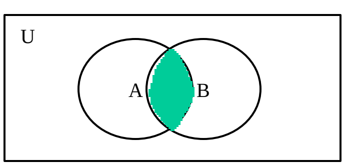
Operações sobre Conjuntos

- UNIÃO:
  - Se A e B são conjuntos, a união de A e B, denotada por A ∪ B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A, ou em B, ou em ambos:
  - A ∪ B = ∀x(x∈A v x∈B)



Operações sobre Conjuntos

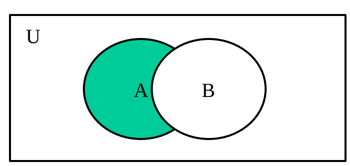
- INTERSEÇÃO:
  - Se A e B são conjuntos, a interseção de A e B, denotada por A ∩ B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A e em B ao mesmo tempo:
  - A ∩ B = ∀x(x∈A ^ x∈B)



A ∩ B

Operações sobre Conjuntos

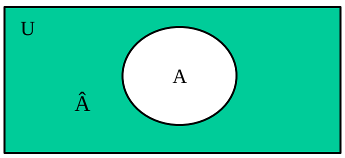
- DIFERENÇA:
  - Se A e B são conjuntos, a diferença de A e B, denotada por A - B, é o conjunto que contém aqueles elementos que estão em A mas não estão em B:
  - A - B = ∀x(x∈A ^ x∉B)



A - B

Operações sobre Conjuntos

- COMPLEMENTO:
  - Se U é o conjunto Universo, U-A é chamado de complemento de A e é denotado por Â:
  - Â = U - B = $\forall x (x \in U \wedge x \notin A)$



Operações sobre Conjuntos

- Produto Cartesiano:
  - O produto cartesiano de dois conjuntos é o conjunto de todos os pares ordenados dos elementos do primeiro conjunto que pode-se formar com os elementos do segundo conjunto.
  - Definição: Supondo-se A e B serem conjuntos de um Universo U. O Produto Cartesiano de A e B é denotado por AxB e definido por:

    AxB={(x,y) | ($x \in A \wedge y \in B$)}
  - Exemplo: Dados os conjuntos X={a,b} e Y={1,2}, o produto cartesiano de XxY é:

    XxY={(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)}

Operações sobre Conjuntos

- Propriedades das Operações sobre Conjuntos:
  - Comutatividade:
    - $A \cup B = B \cup A$
    - $A \cap B = B \cap A$
  - Associatividade:
    - $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
    - $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Distributividade:
    - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  - Idempotência
    - $A \cap A = A$
    - $A \cup A = A$
  - Leis de De Morgan
    - $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
    - $(A \cap B) = A \cup B$

Operações sobre Conjuntos

- Propriedades das Operações sobre Conjuntos:
  - Propriedades do Complemento:
    - $(\overline{A}) = A$
    - $A \cup \hat{A} = U$
    - $A \cap \hat{A} = \varnothing$
  - Propriedades de Elemento Neutro
    - $A \cup \varnothing = A$
    - $A \cap U = A$
- Exemplo:
  - Sejam A, B e C conjuntos. Mostre que:
  - $\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$

Cardinalidade de Conjuntos

- Os Números Naturais
  - Conjunto bastante conhecido, freqüentemente utilizado para contar elementos e objetos;
  - Esta utilização permite a definição da noção de similaridade ou equipotência de dois conjuntos e também do conceito de Número Cardinal de um conjunto.
- Os Axiomas de Peano
  - O conjunto **N**={0,1,2,...} dos números naturais (incluindo o zero) pode ser gerado iniciando-se com um conjunto vazio $\varnothing$ e a noção de "conjunto sucessor" de um conjunto.
  - Um "conjunto sucessor" é denotado por A^+ e definido como sendo o conjunto $A^+ = A \cup \{A\}$

Cardinalidade de Conjuntos

- Os Axiomas de Peano
  - Seja $\varnothing$ o conjunto vazio e seus conjuntos sucessores:

    $\varnothing^+$, $(\varnothing^+)^+$, $((\varnothing^+)^+)^+$, ...

  Que são:

    $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing\{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing\{\varnothing\}\{\varnothing\{\varnothing\}\}\}$...
  - Se chamarmos de 0 o conjunto $\varnothing$, então $\varnothing^+ = 0^+ = 1$, $1^+ = \{0,0^+\} = 2$, e assim por diante, obteremos o conjunto {0,1,2,...}.
  - $0 \in$ N (onde $0 = \varnothing$)
  - Se $n \in$ **N**, então $n^+ \in$ **N** onde $n^+ = n \cup \{n\}$
  - Se um subconjunto S $\subseteq$ **N** possui as propriedades:
    - $0 \in S$, e
    - Se $n \in S$, então $n^+ \in S$
    - Então S=**N**

Cardinalidade de Conjuntos

- Contagem de Conjuntos
  - O que devemos fazer neste caso é estabelecer uma correspondência de um-para-um entre os objetos a serem contados e o conjunto dos naturais.
  - Definição: Dois conjuntos A e B são ditos equipotentes (ou equivalentes, ou possuindo a mesma cardinalidade), e denotados por $A \sim B$, se e somente se existir uma correspondência de um-para-um entre os elementos de A e os elementos de B.
  - Exemplo: Mostre que os números naturais N e os números naturais pares P tem a mesma cardinalidade.
    - Para cada elemento n de N, corresponderá o elemento 2x dos números pares. Assim, podemos estabelecer a correspondência de um-para-um entre os dois conjuntos e portanto $N \sim P$.
    - Note entretanto que $P \subseteq N$.

Cardinalidade de Conjuntos

- Contagem de Conjuntos
  - Definição: Um conjunto A é dito finito se ele tem n elementos distintos onde $n \in N$. O número n chama-se número cardinal de A e escreve-se:

    $n(A) = n$ ou $|A| = n$
    - Exemplo: Seja o conjunto dos inteiros positivos ímpares menor do que 10.

      $|A|=5$
  - Definição: Diz-se que um conjunto é infinito se ele for equivalente a um subconjunto próprio.
  - Definição: Qualquer conjunto equivalente ao conjunto dos números naturais é chamado de enumerável.

Cardinalidade de Conjuntos

- Contagem de Conjuntos
  - Definição: A cardinalidade de um conjunto infinito e enumerável é denotada pelo símbolo $_0$ (aleph zero).
  - Definição: Todo conjunto finito ou enumerável é chamado de contável.
  - O conjunto dos números reais, por exemplo, é infinito, porém, por ser compacto não pode se estabelecer uma correspondência de um-para-um com o conjunto dos números naturais e, portanto, ele é não-enumerável.
  - Definição: Um conjunto que seja infinito e não-enumerável é chamado incomensurável.

Cardinalidade de Conjuntos

- Princípio da Adição
  - Definição: Se A e B são conjuntos disjuntos $[(A \cap B)=\emptyset]$, então $|A \cup B|=|A|+|B|$, ou estendendo:

    $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|$
  - Exemplo: Um estudante tem que escolher um projeto em uma de 3 listas. As 3 listas contêm 23, 15 e 19 possíveis projetos, respectivamente. Quantas possibilidades de projetos há para escolher.

Cardinalidade de Conjuntos

- Princípio da Multiplicação
  - Definição: Se A e B são conjuntos finitos, então $|AxB|=|A|.|B|$, ou estendendo:

    $|A_1 x A_2 x A_3 x \ldots x A_n|=|A_1| x |A_2| x \ldots x |A_n|$
  - Exemplo: A última parte de um nro. de telefone tem 4 dígitos. Quantos números de 4 dígitos existem?
    - Resp: Podemos imaginar como o total de possibilidades de uma seqüência de 4 etapas de escolha de 1 dígito: 10x10x10x10=10.000

Cardinalidade de Conjuntos

- Princípio da Inclusão e da Exclusão
  - Definição: Se A e B são conjuntos finitos, então $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$.
  - Exemplo: Suponha que haja 1807 calouros no CTC da UFSC. Destes, 453 estão cursando Computação, 567 estão cursando Eng. Mecânica e 299 estão em ambos os cursos. Quantos não estão cursando nem Computação nem Eng. Mecânica?

    |Computação|=|A|=453

    |Eng.Mecânica|=|B|=567

    $|A \cap B|=299$

    $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|=453+567-299=721$ estão cursando Computação ou Eng.Mecânica,

    Logo 1807-721=1086 não estão cursando nenhum dos dois cursos.

Cardinalidade de Conjuntos

- Princípio da Inclusão e da Exclusão
  - Definição: Se A, B e C são conjuntos finitos, então $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.
  - Exemplo: Uma quitanda vende apenas brócolis, cenoura e batata. Em um dia, a quitanda atendeu 208 pessoas. Se 114 compraram brócolis, 152 compraram cenouras e 17 compraram batatas, 64 compraram brócolis e cenouras, 12 cenouras e batatas e 8 brócolis e batatas. Determine se alguém comprou os 3 produtos simultaneamente.