Relações

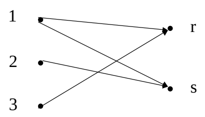
- Ligações entre elementos de conjuntos são representados usando uma estrutura chamada **relação**.
- No nosso dia-a-dia estamos freqüentemente utilizando o conceito de relações:
  - Comparar objetos (maior, menor, igual);
  - Marido-Mulher, Pai-para-filho, Pai-mãe-filho; etc.
- Relações podem ser usadas para resolver problemas tais como:
  - Determinar quais pares de cidades são ligadas por linhas aéreas em uma rede;
  - Busca de uma ordem viável para diferentes fases de um projeto;
  - Elaboração de um modo útil de armazenar informações em bancos de dados computacionais.

Relações

- Definição de Relações:
  - Pode-se definir relações como um subconjunto do produto cartesiano entre conjuntos.
- Relações Binárias:
  - Dados dois conjuntos quaisquer A e B, uma ***relação binária*** entre A e B é um subconjunto obtido do produto cartesiano AxB destes conjuntos.
  - Uma relação binária de A em B é um conjunto R de pares ordenados, onde o 1º elemento de cada par vem de A e o 2º vem de B, ou seja $R \subseteq AxB$.
  - Quando $(a,b) \in R$, diz-se que a está relacionado com B.
  - Usa-se a notação a R b, para denotar que $(a,b) \in R$.
  - O número de relações binárias de A em B é dado por $2^{|A|.|B|}$

Relações

- Exemplo:
  - A={1,2,3} e B={r,s}
  - AxB={(1,r),(1,s),(2,r),(2,s),(3,r),(3,s)} é o Produto Cartesiano de A e B.
  - R ={(1,r),(1,s),(2,s),(3,r)} é uma Relação de A em B.
  - Pode-se dizer: 1 R s, 1 R s, 2 R s, 3 R r.
  - Mas: 3 /R s (o par ordenado (3,r) $\notin$ R.



R	r	s
1	X	X
2		X
3	X	

Relações

- Exercício:
  - Seja A=B={1,2,3,4,5}. Define-se a relação R (menor do que) sobre A como:
  - a R b se e somente se a<b.
  - Neste caso R={....
  - Observe que o que realmente importa em uma relação é que nós saibamos precisamente quais elementos em A estão realcionados a quais elementos em B.

Conjuntos Originados de Relações

- Definições:
  - Seja $R \subseteq AxB$ uma relação de A em B. Então:
  - **Domínio** de R, denotado por Dom(R) é o conjunto de todos os elementos em A que estão relacionados com algum elemento em B.
    - Para o exercício anterior Dom(R) ={1,2,3,4}.
  - **Contradomínio** ou **Imagem** de R, denotado por Ran(R) ou Im(R) é o conjunto de todos os elementos de B que são segundos elementos de pares de R.
    - Para o exercício anterior Ran(R) ={2,3,4,5}.
  - Se $x \in A$, define-se o conjunto R(x) dos **R-relativos de x** como sendo o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por R, ou seja, $R(x)=\{y \in B \mid x\ R\ y\}$
    - Para o exercício anterior R(3) ={4,5}.
  - Similarmente, se $A_1 \subseteq A$, então $R(A_1)$, o conjunto dos **R-relativos de A_1** é o conjunto de todos os y em B com a propriedade de que x está relacionado a y por R e $x \in A_1$.
    - Para o exercício anterior se A_1={2,3} e R(2,3) ={3,4,5}.

Operações de Relações

- Definições:
  - Como relações são conjuntos, é possível aplicar as operações usuais sobre conjuntos também sobre relações. O conjunto resultante também será composto por pares ordenados e definirá uma relação.
  - Sejam R e $S \subseteq AxB$ duas relações de A em B. Então:
  - **R Ç S define uma relação tal que:**
    $a\ (R \cap S)\ b = a\ R\ b \wedge a\ S\ b$
  - **R È S define uma relação tal que:**
    $a\ (R \cup S)\ b = a\ R\ b \vee a\ S\ b$
  - **R - S define uma relação tal que:**
    _$a\ (R - S)\ b = a\ R\ b \wedge a\ /S\ b = (a,b) \in R \wedge (a,b) \notin S$
  - **R define uma relação tal que:**
    $a\ (\overline{R})\ b = a\ /R\ b = (a,b) \notin R$

Relações Internas

- Definições:
  - Uma **Relação Interna** sobre o conjunto A é uma relação de A em A (ou seja, é um subconjunto de AxA).
- Exemplo: Seja A={1,2,3,4}. Quais pares ordenados estão na relação R={(a,b) | a divide b}?
  - R={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,4),(3,3),(4,4)}
- Exercício: Considere as seguintes relações sobre o conjunto dos inteiros:
  - R1 = {(a,b) | a ≤ b }
  - R2 = {(a,b) | a > b }
  - R3 = {(a,b) | a = b ou a = -b }
  - R4 = {(a,b) | a = b }
  - R5 = {(a,b) | a = b+1 }
  - R6 = {(a,b) | a+b ≤ 3 }
  - Quais destas relações contém cada um dos pares ordenados: (1,1),(2,1),(1,2),(1,-1) e (2,2)?

Propriedades das Relações Internas

- **Relação Reflexiva** - Definição:
  - Uma relação binária interna R em um conjunto A é **reflexiva** se, para todo a∈ A, aRa, ou seja

    $\forall a(a \in A \rightarrow (a,a) \in R)$
  - A relação de igualdade é reflexiva, pois para qualquer a ∈ A, a = a.
  - A relação ≤ é reflexiva no conjunto dos números reais.
  - A relação de inclusão ⊆ é reflexiva na família de todos os subconjuntos do conjunto Universo.
  - Exemplo:
    - A relação R={(a,b) | a divide b} é reflexiva não conjunto dos números inteiros excluindo o zero.
    - Dado o conjunto A={1,2,3}, a relação R={(1,1),(1,2),(3,3)} NÃO é reflexiva.

Propriedades das Relações Internas

- **Relação Simétrica** - Definição:
  - Uma relação binária interna R em um conjunto A é **simétrica** se, para todo a∈ A e b∈ A, se aRb então bRa, ou seja

    $\forall a,b((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R)$
  - A relação de igualdade é simétrica, pois para qualquer a e b ∈ A, se a = b, então b = a.
  - A relação ≤ é NÃO é simétrica no conjunto dos números reais.
  - A relação de ser irmão não é simétrica no conjunto de todas as pessoas, mas é simétrica no conjunto de todos os homens.
- **Relação Assimétrica** - Definição:
  - Uma relação binária interna R em um conjunto A é **assimétrica** se, para todo a∈ A e b∈ A, se aRb então b/Ra, ou seja $\forall a,b((a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R)$

Propriedades das Relações Internas

- **Relação Anti-Simétrica** - Definição:
  - Uma relação binária interna R em um conjunto A é **anti-simétrica** se, para todo a∈ A e b∈ A, se aRb e bRa, então a=b, ou seja

    $\forall a,b((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \rightarrow a=b)$
  - A relação de subconjunto próprio ⊂ é anti-simétrica no conjunto de todos os subconjuntos do conjunto Universo.
  - É possível possuir uma relação que seja ao mesmo tempo simétrica e anti-simétrica, como por exemplo a relação de igualdade.

Propriedades das Relações Internas

- **Relação Transitiva** - Definição:
  - Uma relação binária interna R em um conjunto A é **transitiva** se, para todo a∈ A, b∈ A e c∈ A, se aRb e bRc, então aRc, ou seja

    $\forall a,b,c((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R)$
  - As relações ≤, < e = são transitivas no conjunto dos números reais.
  - As relações ⊆, ⊂ e = são transitivas na família de todos os subconjuntos do conjunto Universo.
  - A relação "ser mãe" NÃO é transitiva.

Propriedades das Relações Internas

- Exercício 1: Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, assimétricas, anti-simétricas ou transitivas :
- a) R= { (1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(3,3),(4,4) }
- b) R= {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)}
- Respostas :
- a) N, N, N, N, N N
- b) S, N, S, N, N, S

Propriedades das Relações Internas

- Exercício 2: Determine se as relações abaixo são reflexivas, simétricas, assimétricas, anti-simétricas ou transitivas :
- Considere as relações sobre o conjunto dos inteiros:
  - R1 = {(a,b) | a ≤ b }
  - R2 = {(a,b) | a > b }
  - R3 = {(a,b) | a = b ou a = -b }
  - R4 = {(a,b) | a = b }
  - R5 = {(a,b) | a = b+1 }
  - R6 = {(a,b) | a+b ≤ 3 }

Representação de Relações

- Além de representar as relações explicitando propriedades dos pares ordenados ou listando todos os pares, também é possível representar relações usando:
  - Matrizes de 0´s e 1´s.
  - Grafos direcionados (dígrafos).
- MATRIZES DE RELAÇÕES
  - Sejam $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$ e R uma relação de A em B. A matriz mxn da relação R pode ser obtida da seguinte maneira:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } a_i R b_j, \text{ ou seja, se } (a_i,b_j) \in R \\ 0 \text{ se } a_i \backslash R b_j, \text{ ou seja, se } (a_i,b_j) \notin R \end{cases}$$

  - M_R é denominada Matriz de R.

Representação de Relações

- Exemplo 1: Sejam A={ {1,2,3} e B={r,s} e a relação R de A em B dada por
- R= { (1,r),(2,s),(3,r)}. Então a matriz M_R de R é:

$$M_{R(3x2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exemplo 2: Defina a relação representada pela matriz:

$$M_{R(3x4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Solução: Como M é 3x4, fazemos: A={a1,a2,a3} e B={b1,b2,b3,b4}

Então, como (ai,bj)R se e somente se mij=1, temos:

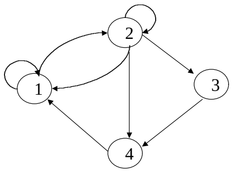
- R={(a1,b1),(a1,b4),(a2,b2),(a2,b3),(a3,b1),(a3,b3)}

Representação de Relações

- DÍGRAFOS DE RELAÇÕES
  - Seja R uma relação em um conjunto $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$.
  - Os elementos de A são representados por pontos ou círculos chamados “nós” ou “vértices”.
    - Os nós correspondentes a a_i e a_j são identificados como a_i e a_j respectivamente.
  - Se $a_i R a_j$, isto é, se $(a_i,a_j) \in R$, então conecta-se os nós a_i e a_j através de um arco e coloca-se uma seta no arco na direção de a_i para a_j.
  - Quando todos os nós correspondentes aos pares ordenados da relação R estiverem conectados através de arco orientados, tem-se então um **grafo orientado** ou **dígrafo** da relação R.

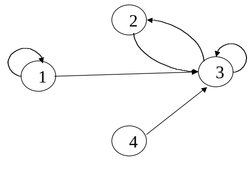
Representação de Relações

- Exemplo 1: Sejam A={1,2,3,4} e R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4),(4,1)}.
- O dígrafo de R é:



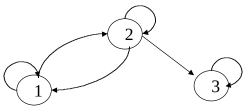
Representação de Relações

- Exemplo 2: Explicite a relação determinada pelo dígrafo abaixo:



Caracterização das Propriedades usando Matrizes e Dígrafos

- Reflexiva:
  - Matrizes: A matriz M_R possui todos os elementos da diagonal principal igual a 1.
  - Dígrafos: Para todos os vértices do dígrafo, existem arestas que ligam o vértice a ele mesmo.

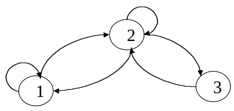


$M_R=$

1	1	0
1	1	1
0	0	1

Caracterização das Propriedades usando Matrizes e Dígrafos

- Simétrica:
  - Matrizes: A matriz M_R é simétrica em relação a diagonal principal, ou seja, $[M_R]=[M_R]^T$.
  - Dígrafos: Se de algum vértice do dígrafo partir uma aresta para um outro vértice, deve obrigatoriamente existir uma aresta no sentido contrário.

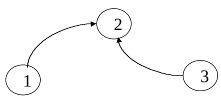


$M_R=$

1	1	0
1	1	1
0	1	0

Caracterização das Propriedades usando Matrizes e Dígrafos

- Assimétrica:
  - Matrizes: A matriz M_R **<u>deve</u>** ter a diagonal principal igual a zero, além disso, $m_{ij} \neq m_{ji}$.
  - Dígrafos: Se de algum vértice do dígrafo partir uma aresta para um outro vértice, não pode existir uma aresta no sentido contrário.

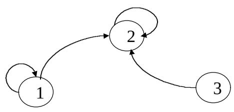


$M_R=$

0	1	0
0	0	0
0	1	0

Caracterização das Propriedades usando Matrizes e Dígrafos

- Anti-Simétrica:
  - Matrizes: A matriz M_R **<u>pode</u>** ter a diagonal principal igual a zero, além disso, $m_{ij} \neq m_{ji}$.
  - Dígrafos: Se de algum vértice do dígrafo partir uma aresta para um outro vértice, não pode existir uma aresta no sentido contrário.



$M_R=$

1	1	0
0	1	0
0	1	0

Partição e Cobertura de um Conjunto

- Definição:
  - Seja S um dado conjunto e $A=\{A_1,A_2,...,A_m\}$ onde cada A_i é um subconjunto de S e

    $$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$$

  Então o conjunto A é chamado de **<u>cobertura</u>** de S e os conjuntos $A_1,A_2,...A_m$ ***cobrem*** S.
  - Se além disso, os conjuntos Ai forem mutuamente disjuntos, ou seja

    $$\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$$

  Então A é chamado de **<u>partição</u>** de Se os conjuntos $A_1,A_2,...A_m$ são chamados de ***blocos*** de S.

Partição e Cobertura de um Conjunto

- Exemplo:
  - Seja S={a,b,c} e consideremos os seguintes subconjuntos de S,
  - A={{a,b},{b,c}} B={{a},{a,c}} C= {{a},{b,c}}
  - D={{a,b,c}} E={{a},{b},{c}} F= {{a},{a,b},{a,c}}
  - Os conjuntos A e F são **coberturas** de S enquanto C, D e E são **partições** de S.

Relação de Equivalência

- Definição:
  - Uma relação R em um conjunto A é uma Relação de Equivalência se:
    1. R for reflexivo;
    2. R for simétrico; e
    3. R for transitivo.
  - Exemplos:
    - A igualdade de números em um conjunto de números reais;
    - A similaridade de triângulos em um conjunto de triângulos;
    - A relação entre linhas que são paralelas em um conjunto de linhas de um plano.

Relação de Equivalência

- Exemplos:
- Suponha que a matrícula dos estudantes em uma dada Universidade siga o esquema:

Inicial do Nome:	Horário de Matrícula:
A-G	8:00 – 10:59
H-N	11:00 - 13:59
O-Z	14:00 - 16:59

- Seja R a relação que contém (x,y) e x e y são estudantes com nomes começando com letras do mesmo bloco.
  - Conseqüentemente, x e y podem se matricular na mesma hora se e somente se (x,y) ∈ R.
  - Pode-se notar que R é reflexiva, simétrica e transitiva.

Relação de Equivalência

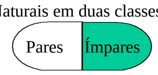
- Exemplos:
  - Dada a relação R definida sobre os Naturais como:
    - R={(x,y) | |x-y|.MOD.2=0} (resto da divisão por 2 = 0)
  - Podemos observar alguns dos pares ordenados desta relação...{...,(1,3),(1,1),(3,1),(1,5),(5,1),(3,3),(5,5),...

...,(0,0),(0,2),(0,4),(2,4),(4,2),(2,2),(4,4),(0,4),(4,0),...}

  - Esta relação é reflexiva, simétrica e transitiva.
  - É possível identificar dois subconjuntos (**partições ou blocos**) dos Naturais onde estas propriedades (reflexiva, simétrica e transitiva) se mantém. Estas duas partições são:
    - O subconjunto dos **Números Pares** e o dos **Números Ímpares.**

Classe de Equivalência

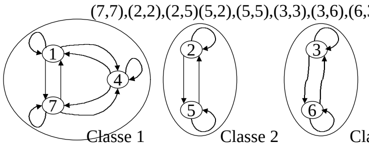
- Teorema:
  - Uma relação de equivalência num conjunto divide-o em partições, colocando os elementos que são relacionados a cada um dos outros numa mesma classe, denominada de **classe de equivalência**. Estas classes de equivalência podem ser tratadas como entidades.
  - Exemplo:
    - A figura a seguir mostra a partição do conjunto dos Naturais em duas classes de equivalência.



N

Classe de Equivalência

- Exemplo:
  - Seja A={1,2,3,4,5,6,7} e seja R a relação “módulo congruente 3” dada por R={(x,y) | (x-y) é divisível por 3}
  - Mostre que R é uma relação de equivalência, desenhe o grafo de R e determine as classes de equivalência geradas pelos elementos de A.
    - R={(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(1,7),(7,1),(4,7),(7,4),(7,7),(2,2),(2,5)(5,2),(5,5),(3,3),(3,6),(6,3),(6,6)}



Classe 1 Classe 2 Classe 3

É Reflexiva, Simétrica e Transitiva.

Relações de Equivalência

- Exercícios:
  1. Seja A={1,2,3,4} e seja a relação de equivalência R sobre A definida por R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)}. Determine todas as classes de equivalência de R.
  2. Se {{1,2},{3},{4,5}} é uma partição do conjunto A={1,2,3,4,5}. Determine a relação de equivalência R correspondente.
  3. Seja A={a,b,c}. Determine se a relação R cuja matriz é dada abaixo é uma relação de equivalência. Quais as classes de equivalência?

1	0	0
0	1	1
0	1	1

Relações de Compatibilidade

- Definição:
  – Uma relação R em A é chamada uma **relação de compatibilidade** se ela é **reflexiva e simétrica**.
- Exemplo:
  – Seja X={ball, bed, dog, egg, let} e seja R a relação dada por R={(x,y)| x e y possuem alguma letra em comum}.
  – R={(ball,ball),(bed,bed),(dog,dog),(egg,egg),(let,let),
  (ball,bed),(bed,ball),(ball,let),(let,ball),(bed,dog),(dog,bed),
  (bed,egg),(egg,bed),(bed,let),(let,bed),(dog,egg),(egg,dog)
  (egg,let),(let,egg)}
  – Desenho o grafo.

Relações de Compatibilidade

– R é uma relação de compatibilidade e x e y são chamados **compatíveis** se xRy.

– Embora uma relação de equivalência em um conjunto defina uma partição de um conjunto em classes de equivalência, uma relação de compatibilidade não necessariamente define uma partição.

– Entretanto, uma relação de compatibilidade define uma **cobertura do conjunto**.

Relações de Ordem

- Relações são usadas freqüentemente para alguns ou todos os elementos de um conjunto.
  – Ordenamos palavras usando xRy, onde x vem antes do y no dicionário.
- A relação de ordem é uma generalização do conceito de menor ou igual (≤) ou de maior ou igual (≥). A relação de ordem é interna e só existe se comparar elementos do mesmo conjunto.
- Uma relação de ordem é reflexiva, anti-simétrica e transitiva.
- Um conjunto A, junto com sua relação de ordem R é chamado de **poset** (partially ordered set) e é denotado por (A,R).

Relações de Ordem

- Relação de Ordem Total – Definição:
  – Uma relação de ordem R em um conjunto não vazio A tal que todos os elementos de A são comparáveis 2 a 2 pela R chama-se **Relação de Ordem Total** em A.
  $\forall x \forall y (x,y \in A \wedge (xRy \vee yRx))$
  – Se todos os elementos podem ser comparáveis entre si, esta relação é de Ordem Total.
- Exemplo:
  – A relação no conjunto A={2,4,8,16,...,2n,...) definida por “x é múltiplo de y” é uma relação de ordem total em A.
  – A ordem natural “x ≤ y” no conjunto dos números reais é uma relação de ordem total.

Relações de Ordem

- Relação de Ordem Parcial – Definição:
  – Se a relação é reflexiva, anti-simétrica e transitiva mas não é universal, ou seja, não vale para todos os elementos do conjunto considerado (alguns não são comparáveis) é uma **Relação de Ordem Parcial**.
- Exemplo:
  – A relação no conjunto dos números naturais por “x|y” (relação de divisibilidade) é uma Relação de Ordem Parcial em **N** (reflexiva, anti-simétrica e transitiva), porque dois números naturais nem sempre são comparáveis por esta ordem, como, por exemplo, 5 e 7 (5 não divide 7 e 7 não divide 5).

Relações de Ordem

- Exemplo:
  1. Mostre que a relação ≥ é uma relação de ordem sobre o conjunto dos inteiros. Diga se ela é uma relação de ordem total ou parcial.
  – Solução:
    - ≥ ={(n1,n2) | n1 e n2 ∈ Z ^ n1 é maior ou igual a n2}

    - a≥ a para todo inteiro a => ≥ é reflexiva
    - a≥b e b≥a, então a=b => ≥ é anti-simétrica
    - a≥b e b≥c, então a≥c => ≥ é transitiva

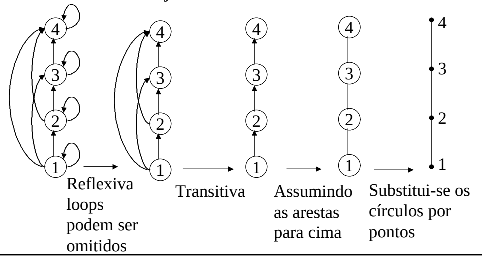
    - Além disso para qualquer a e b ∈ Z, ou a≥b OU b≥a
    - **Logo, $(Z,^3)$ é uma Relação de Ordem Total sobre o conjunto dos inteiros.**
  2. Mostre que a relação ⊆ é uma relação de ordem sobre o conjunto potência do conjunto {1,2,3}. Diga se ela é uma relação de ordem total ou parcial.

Relações de Ordem

- Diagramas de Hasse de Conjuntos munidos de uma Relação de Ordem
  - Conjuntos munidos de uma relação de ordem são uma relação e portanto pode-se desenhar seu dígrafo.
  - No entanto, muitas arestas não precisam estar presentes em virtude das propriedades da relação de ordem (reflexiva e transitiva).
  - Para simplificar a representação, retira-se de seus dígrafos as arestas que sempre devem estar presentes.
  - As estruturas obtidas desta forma são chamadas de DIAGRAMAS DE HASSE da relação de ordem.

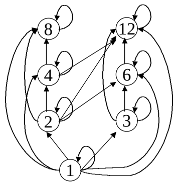
Diagramas de Hasse

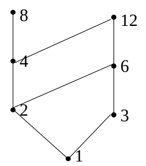
- Exemplo:
  - Considere o dígrafo da relação de ordem "≤" sobre o conjunto A={1,2,3,4}:



Diagramas de Hasse

- Exemplo 2:
  - Seja A={1,2,3,4,6,8,12}. Considere a relação de divisibilidade sobre A.





Diagramas de Hasse

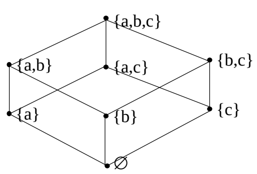
- Definições:
  - Se (A,R) é um conjunto munido de uma relação de ordem e a,b∈ A, então:
    1. Se aRb, diz-se que "**<u>a precede b</u>**"
    2. Se aRb e não existe nenhum c tal que aRc e cRb, diz-se que "**<u>a é o precedecessor imediato de b</u>**" **(escreve-se aÐb).**
    3. Se aRb, diz-se que "**b sucede a**"
    4. Se aRb e não existe nenhum c tal que aRc e cRb, diz-se que "**<u>b é o sucessor imediato de a</u>**".

Diagramas de Hasse

- Outra maneira de se construir Diagramas de Hasse:
  - O Diagrama de Hasse de um conjunto munido de uma relação de ordem (A,R) é o dígrafo no qual os vértices são elementos de A.
  - Existirá uma aresta de um vértice a para um vértice b sempre que **aÐb** .
    - Ao invés de desenhar uma seta de a para b, coloca-se b mais alto do que a e desenha-se uma linha entre eles.
    - Fica subentendido que o movimento para cima indica sucessão.

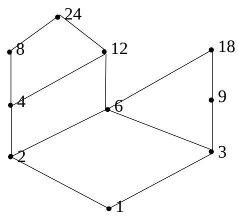
Diagramas de Hasse

- Exemplo 1:
  - Seja S={a,b,c} e seja A=P(S) (o conjunto potência de S). Desenhe o Diagrama de Hasse do conjunto munido da relação de ordem (A,⊆).
  - A={∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}



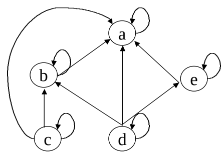
Diagramas de Hasse

- Exemplo 2:
  - Seja A={1,2,3,4,6,8,9,12,18,24}. Desenhe o Diagrama de Hasse do conjunto munido da relação de ordem “a divide b” (A,|).



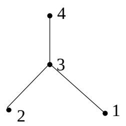
Diagramas de Hasse

- Exercício 1:
  - Determine o Diagrama de Hasse da relação de ordem que tem o seguinte dígrafo:



Diagramas de Hasse

- Exercício 2 e 3:
  - Descreva os pares ordenados da relação determinada pelo Diagrama de Hasse sobre o conjunto A={1,2,3,4} dado abaixo.



  - Determine o Diagrama de Hasse das relações sobre o conjunto A={1,2,3,4,5} cuja matriz é:.

$$M=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Elementos Extremos de Relações

- Definição:
  - Considere o conjunto munido de relação de ordem (A,R). Então:

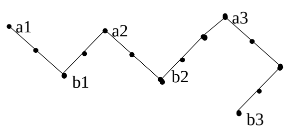
a) Um elemento a ∈ A é chamado de um **elemento maximal** de A se não existe c ∈ A tal que aRc e a≠c.

b) Um elemento a ∈ A é chamado de um **elemento minimal** de A se não existe c ∈ A tal que cRa e a≠c.

- Exemplos:
  - (**N***,≤): elemento minimal:1 maximal: não tem
  - (**R**, ≤): elemento minimal: não tem maximal: não tem
  - ({1,2,3,4}, ≤): elemento minimal:1, maximal: 4

Elementos Extremos de Relações

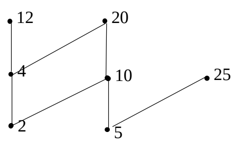
- Exemplos:
  - Considere o conjunto munido de relação de ordem (A,R) e seu diagrama de Hasse.



•a1, a2 e a3 são elementos **maximais** de A
•b1, b2 e b3 são elementos **minimais** de A

Elementos Extremos de Relações

- Exemplos:
  - Quais elementos do conjunto munido de relação de ordem ({2,4,5,10,12,20,25},|) são maximais e quais são minimais?



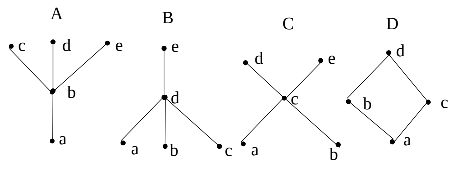
•12, 20 e 25 são elementos **maximais** de A
•2 e 5 são elementos **minimais** de A

Elementos Extremos de Relações

- Definição:
  – Seja o conjunto munido de uma relação de ordem (A,R). Então:
  a) Um elemento a∈ A é chamado de um **maior elemento** de A se bRa **para todo** b∈ A.
  b) Um elemento a∈ A é chamado de um **menor elemento** de A se aRb **para todo** b∈ A.

Elementos Extremos de Relações

- Exemplos:

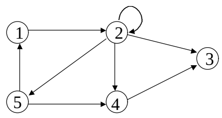


(A): menor elemento é “a”, não tem menor elemento.
(B): não tem menor elemento, “e” é o maior elemento.
(C): não tem maior nem menor elemento.
(D): “a” é o menor elemento, “d” é o maior elemento.

Caminhos em Relações e Dígrafos

- Definição: Seja R uma relação sobre o conjunto A. Um caminho de comprimento n de a para b é uma seqüência finita ¶=a,x_1,x_2,...,x_{n-1},b tal que:
  ARx_1, x_1Rx_2, ..., x_{n-1}Rb
- Note que um caminho de comprimento n envolve n+1 elementos de A (não necessariamente distintos).
- O modo mais fácil de visualizar um caminho é com o dígrafo de uma relação: sucessão de arestas, seguindo os sentidos indicados.
- Então:

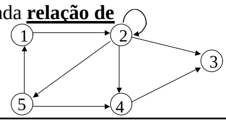
¶$_1$=1,2,5,4,3 é um caminho de comprimento 4 de 1 a 3.
¶$_2$=1,2,5 é um caminho de comprimento 2 de 1 a 1.
¶$_3$=2,2 é um caminho de comprimento 1 de 2 a 2.



Caminhos em Relações e Dígrafos

– Um caminho que começa e termina no mesmo vértice é chamado de um ciclo (¶$_2$ e ¶$_3$ são ciclos).
– Caminhos de comprimento 1 são os pares ordenados (x,y) que pertencem a R.
– Caminhos em relações R podem ser usados para definir novas relações bastante úteis.

- Definição: xR^ny significa que há um **caminho de comprimento n** de x até y em R.
- Definição: $xR^{\propto}y$ significa que há um caminho de x até y em R ($R^{\propto}$ é chamada **relação de conectividade** para R).



Caminhos em Relações e Dígrafos

- Exemplo: Sejam A={a,b,c,d,e} e R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,e),(c,d),(d,e)}. Explicite :
  – a)R^2
  – b)$R^{\propto}$

Produto Booleano

A=

1	0
0	1
1	0

B=

1	1	0
0	1	1

A⊗B=

(1^1)v(0^0)	(1^1)v(0^1)	(1^0)v(0^1)
(0^1)v(1^0)	(0^1)v(1^1)	(0^0)v(1^1)
(1^1)v(0^0)	(1^1)v(0^1)	(1^0)v(0^1)

A⊗B=

1v0	1v0	0v0
0v0	0v1	0v1
1v0	1v0	0v0

A⊗B=

1	1	0
0	1	1
1	1	0

Caminhos em Relações e Matrizes

- Se R é uma relação sobre $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ então $M_R^2=M_R \otimes M_R$.
- Para n>2 e para uma relação R sobre A, então: $M_R^n= M_R \otimes M_R \otimes ... \otimes M_R$ (n fatores)
- Exemplo: Sejam A={a1,a2,a3,a4,a5} e

$$\mathbf{M_R}= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M_R}\, \text{Ä} \mathbf{M_R} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0 \; 0 \; 1 \; 0 \; 0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{Ä} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

•Exemplo: Sejam A={a,b,c,d,e} e R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,e),(c,d),(d,e)}. Explicite :

– a) R^2 b) R^∞

Relações Externas

- Quanto aos conjuntos, uma relação é dita **EXTERNA** se tomarmos os elementos de **conjuntos distintos** e verificarmos a relação entre estes elementos.
- Numa relação externa temos:

  $A_1 \neq A_2 \neq ... \neq An$
- Exemplo:
  - Dados os seguintes conjuntos: P de professores; D de disciplinas oferecidas em um semestre; L os locais onde serão ministradas as aulas e H os horários das aulas:
  - P={Paulo, Carlos, Maria, Henrique}
  - D={INE2135, INE5381, INE5377, INE5102}
  - L={CTC005, CTC102, CTC221, CTC004}
  - H={8-10, 10-12}

Relações Externas

- As seguintes relações podem ser definidas entre estes conjuntos:

Paulo	INE5377
Maria	INE5381
Paulo	INE5102
Carlos	INE2135
Henrique	INE5102

=R1=Professores x Disciplinas

INE2135	CTC005
INE5102	CTC004
INE5377	CTC221
INE5381	CTC004

=R2=Disciplinas x Salas

INE2135	8-10
INE5102	10-12
INE5377	8-10
INE5381	8-10

=R3=Disciplinas x Horários

Relações Externas

- As sub-relações de uma relação podem ser obtidas através de extração de propriedades que caracterizam a relação. Isto é feito através de operações de seleção e projeção.
- Por exemplo ao se selecionar "Paulo" da R1 cria-se uma nova sub-relação que indica quais as disciplinas que o professor Paulo irá ministrar.
- Estas manipulações podem ser feitas no computador utilizando linguagens de base de dados como a SQL.

Combinação de Relações Binárias

- Da mesma forma que nós podemos manipular conjuntos através das operações de união, interseção, complemento, podemos utilizar estas operações para modificar combinar e refinar relações existentes para produzir novas relações.
- Note que, uma vez que relações de A em B são subconjuntos de AxB, duas relações de A em B podem ser combinadas de todos os modos em que se puder combinar dois conjuntos.
- **Operações entre Relações:**
  - Sejam R e S duas relações de A em B. Então as seguintes relações são definidas:

1. ~R: **<u>Relação Complementar</u>** de R é definida como: $(a,b) \in \sim R \leftrightarrow (a,b) \notin R$

Combinação de Relações Binárias

- **Operações entre Relações:**

2. $R \cap S$: **<u>Relação Interseção</u>** de R com S é definida como: $(a,b) \in R \cap S \leftrightarrow (a,b) \in R \wedge (a,b) \in S$

3. $R \cup S$: **<u>Relação União</u>** de R com S é definida como: $(a,b) \in R \cup S \leftrightarrow (a,b) \in R \vee (a,b) \in S$

4. R^{-1}: **<u>Relação Inversa</u>** de R é definida como: $(a,b) \in R^{-1} \leftrightarrow (b,a) \in R$

Combinação de Relações Binárias

- **Operações entre Relações:**
  - Exercícios:
    - Sejam A={1,2,3,4}, B={a,b,c} e R e S de A em B definidas por:

R={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a)}

S={(1,b),(2,c),(3,b),(4,b)}

Mostrar:

a) ~R = {(1,c),(2,a),(3,a),(3,c),(4,b),(4,c)}

b) R∩S={(1,b),(2,c),(3,b)}

c) R∪S={(1,a),(1,b),(2,b),(2,c),(3,b),(4,a),(4,b)}

d) R^{-1}={(a,1),(b,1),(b,2),(c,2),(b,3),(a,4)}

Composição de Relações Binárias

- Definição:
  - Seja R a relação de A para B e S a relação de B para C. Então a relação escrita como RoS é chamada de "**<u>relação composta</u>**"de R e S onde
  - RoS={(x,z)|x∈ A ^ z∈ C ^ ∃y(y∈ B ^ (x,y)∈ R ^ (y,z)∈ S)}
  - A operação de obtenção de RoS de R e S é chamada "**composição**" de relações.
  - Nota:
    - RoS é vazia se a interseção da imagem de R e do domínio de S for vazia.
    - RoS não é vazia se existir pelo menos um par ordenado (x,y)∈ R tal que o segundo membro for o primeiro membro de um par ordenado de S.

Composição de Relações Binárias

- Exemplo:
  - Sejam A={1,2,3,4} e as relações R e S sobre A definidas por:

R={(1,2),(1,1),(1,3),(2,4),(3,2)}

S={(1,4),(1,3),(2,3),(3,1),(4,1)}

  - Como (1,2)∈ R e (2,3)∈ S, então temos que (1,3)∈ RoS.
  - Também (1,1)∈ R e (1,4)∈ S, assim, (1,4)∈ RoS.
  - Continuando com este processo, encontra-se que:
  - RoS={(1,4),(1,1),(1,3),(2,1),(3,3)}

Composição de Relações Binárias

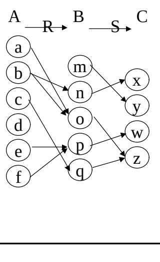
- Observações:
  - Em geral RoS≠SoR
  - **Teorema**: A operação de composição sobre relações é associativa, isto é:

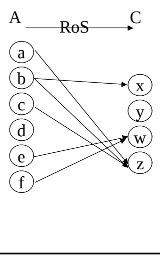
    (RoS)oP = Ro(SoP)
  - **Teorema**: Sejam A, B e C conjuntos, R uma relação de A em B e S uma relação de B em C. Então:

    $(RoS)^{-1} = S^{-1}oR^{-1}$

Composição de Relações Binárias

- Usando Grafos
  - Através dos grafos de R e de S pode-se facilmente construir e visualizar o grafo de RoS.





Composição de Relações Binárias

- Exercícios:
  - Seja R={(1,2),(3,4),(2,2)} e S={(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)}. Ache RoS, SoR, Ro(SoR), (RoS)oR, RoR, SoS e RoRoR .
  - RoS={(1,5),(3,2),(2,5)}
  - SoR={(4,2),(3,2),(1,4)}
  - Ro(SoR)={(3,2)}
  - (RoS)oR={(3,2)}
  - RoR={(1,2),(2,2)}
  - SoS={(4,5),(3,3),(1,1)}
  - RoRoR={(1,2),(2,2)}

Composição de Relações Binárias

- Exercícios:
  - Seja R e S duas relações sobre o conjunto dos naturais positivos $\mathbf{N}^+$:

$R=\{(x,2x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$ e $S=\{(x,7x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$

Ache RoS, SoR, RoR, RoRoR e RoSoR.

- $RoS=\{(x,14x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$
- $SoR=\{(x,14x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$
- $RoR=\{(x,4x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$
- $RoRoR=\{(x,8x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$
- $RoSoR=\{(x,28x) \mid x \in \mathbf{N}^+\}$

Composição de Relações Binárias

- Composição usando Matrizes de Relações
  - Teorema: Se R é uma relação de A em B e S é uma relação de B em C, então:

    $M_{RoS}=M_R \otimes M_S$

  Além disso, se |A|=m (cardinalidade de A = m), |B|=n e |C|=p:
    - M_R tem ordem mxn
    - M_S tem ordem nxp
    - M_{RoS} tem ordem mxp
  - Para construir a matriz MRoS, percorremos a iésima linha de MR e a Késima coluna de MS procurando ao menos 1 elemento j, tal que o elemento da posição j da linha e da posição j da coluna percorrida seja 1. Então a posição [i,k] de MRoS recebe 1, caso contrário recebe 0.

Composição de Relações Binárias

- Exemplo:
  - Seja A={a,b,c} e sejam R e S relações sobre A com matrizes:

$$M_R=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad M_s=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R={(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b)}

S={(a,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)}

RoS={(a,a),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c)}

- E a matriz da relação composta RoS é:

$$M_{RoS}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Composição de Relações Binárias

- Exercício:
  - Seja A={1,2,3,4,5} e sejam R={(1,2),(3,4),(2,2)} e S={(4,2),(2,5),(3,1),(1,3)}. Obter as matrizes RoS e SoR.

$$M_R=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad M_s=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$M_{RoS}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad M_{SoR}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Reticulados

- **Vamos voltar as Relações de Ordem:**

Relembrando alguns conceitos fundamentais:

a) Um elemento a ∈ A é chamado de um **<u>elemento maximal</u>** de A se não existe c ∈ A tal que aRc e a≠c.

b) Um elemento a ∈ A é chamado de um **<u>elemento minimal</u>** de A se não existe c ∈ A tal que cRa e a≠c.

c) Um elemento a∈ A é chamado de um **<u>maior elemento</u>** de A se bRa **para todo** b∈ A.

d) Um elemento a∈ A é chamado de um **<u>menor elemento</u>** de A se aRb **para todo** b∈ A.

Reticulados

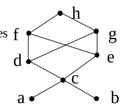
- **Alguns Conceitos Novos:**
- Definição:

Considere um POSET (A,R) e um subconjunto B de A.

a) Um elemento a ∈ A é chamado de **<u>cota superior</u>** de B se bRa para todo b ∈ B.

b) Um elemento a ∈ A é chamado de **<u>cota inferior</u>** de B se aRb para todo b ∈ B.

- Exemplo: Considere o POSET a={a,b,c,d,e,f,g,h}, cujo diagrama de Hasse é mostrado. Ache todas as cotas superiores e inferiores para os subconjuntos B1={a,b}; b2={c,d,e}.
- B1 não tem cota inferior.
- c,d,e,f,g e h são cotas superiores de B1.
- f,g e h são cotas superiores de B2.
- a e b são cotas inferiores.



Reticulados

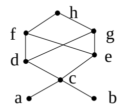
- **Mais Alguns Conceitos Novos:**
- Definição:

Considere um POSET (A,R) e um subconjunto B de A.

a) Um elemento a ∈ A é chamado de **menor cota superior** (LUB) de B se a for uma cota superior de B e aRa’, sempre que a’ é uma cota superior de B.

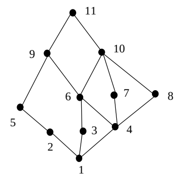
b) Um elemento a ∈ A é chamado de **maior cota inferior** (GLB) de B se a for uma cota inferior de B e a’Ra, sempre que a’ é uma cota inferior de B.

- Exemplo: Considere o POSET a={a,b,c,d,e,f,g,h} e B1={a,b}; b2={c,d,e}.
- Ache os ULB e GLB de B1 e B2.
- LUB(B1)=c
- GLB(B2)=c



Reticulados

- Exemplo:
  - Seja A={1,2,3,4,5,...,11} o POSET cujo diagrama de Hasse é mostrado. Ache a menor cota superior e a maior cota inferior de B={6,7,10} se eles existirem.

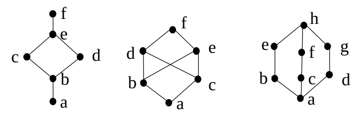


Reticulados

- Definição:
  - Um POSET (A,R) é chamado um RETICULADO se todo par de elementos {a,b} possui tanto uma menor cota superior (LUB), como uma maior cota inferior (GLB).
- Observações:
  - Reticulados possuem muitas propriedades especiais.
  - São usados em muitas aplicações diferentes tais como modelo de fluxo de informações.
  - Eles também tem um papel importante na álgebra booleana.
  - Denota-se o LUB({a,b}) por avb (**operação de junção**) e denota-se o GLB({a,b}) por a^b (**operação de encontro**).

Reticulados

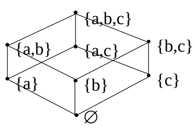
- Exemplo:
  - Determine se os POSETS representados por cada um dos diagramas de Hasse abaixo são reticulados.



• Os posets (A) e (C) são reticulados, pois cada par de elementos tem tanto uma LUB como uma GLB.
•Já o poset (B) não é um reticulado, pois os elementos b e c não possuem menor cota superior (LUB). (note que d, e, f são cotas superiores, mas nenhum precede os outros dois)

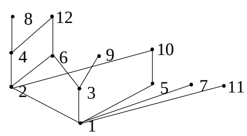
Reticulados

- Alguns Exemplos Interessantes:
  - Seja S={a,b,c} e L=P(S). Como sabemos, ⊆ é uma relação de ordem parcial em L (L,⊆).
  - Determine se (L,⊆) é um reticulado.
  - Note que para quaisquer conjuntos A e B ∈ L, então a junção de A e B (AvB) é a sua união A∪B, e o encontro de A e B (A^B) é a sua intersecção A∩B.
  - Logo, L é um reticulado.



Reticulados

- Alguns Exemplos Interessantes:
  - Considere o poset (Z^+,|), onde para a e b em Z^+, a|b se a “é divisível” por b. Então (Z^+,|) é um reticulado em que as operações de junção e encontro de a e b são respectivamente:
  - avb = mmc(a,b)
  - a^b = mdc(a,b)



Reticulados

- Exercício:
  - Quais dos diagramas de Hasse a seguir representam reticulados?