Lógica Matemática

- Lógica é a disciplina que lida com métodos de raciocínio.
- “Lógica é o estudo sistemático da estrutura das proposições e das condições gerais de inferências válidas, por um método que abstrai o conteúdo ou assunto da proposição e se preocupa unicamente com sua forma lógica” – Enciclopédia Britânica.
- O Lógica provê regras e técnicas para determinar se um dado argumento é válido.
- Aplicações Diretas na Área da Ciência da Computação: Projeto de Circuitos Lógicos, Inteligência Artificial, Construção e verificação de Algoritmos.

Lógica Matemática

- Notas Históricas:
  - Os primeiros princípios referentes à Lógica podem ser atribuídos a Aristóteles.
  - No livro *Primeiro Analítica* se encontra o núcleo do pensamento Aristotélico – a Teoria dos Silogismos.
  - “Silogismo é uma frase na qual tendo se afirmado algumas coisas, algo além destas coisas se torna verdadeiro”.
  - A Lógica Aristotélica se ocupa apenas da forma do pensamento, sem levar em consideração os objetos particulares em que se pensa.
  - Nos séculos que se seguiram a lógica e a filosofia floresceu na Grécia, servindo de alimento a curiosidade intelectual.

Lógica Matemática

- Paradoxos
  - “Se você diz que está mentindo e está dizendo a verdade então você está mentindo?”
  - “Se você sabe que está morto, você está morto,

    Mas se você sabe que está morto, você não está morto,

    Portanto você não sabe se está morto ou não.”
  - “Havia uma pequena cidade onde só existia um barbeiro. O barbeiro recebeu a missão de barbear todos os homens que não barbeavam a si mesmo. Se não o fizesse morreria!”

    Quem barbeia o barbeiro?
- Axioma do meio excluído – as proposição só podem ter dois valores de verdade, V ou F.

Lógica Matemática

- Sistemas Lógicos Formais da Lógica Clássica
  - Lógica Proposicional ou Cálculo Sentencial
    - É o sistema Formal mais simples que se possa imaginar.
    - É um sistema no qual proposições inteiras (ou sentenças) têm relações umas com as outras.
    - “O Fígado é um orgão grande”
    - “Varsóvia é a capital da Polônia”
  - Lógica de Predicados
    - Considera ainda variáveis e quantificadores sobre estas variáveis.
    - O Cálculo de Predicados divide as proposições em seus componentes.
    - “João está rezando”
    - “Maria ama João”
    - “Todos estão com medo”

Lógica Matemática

- Exemplo: Quais das seguintes asserções são proposições?

a) 2 + 3 = 5 – proposição, verdadeira
b) 3 não é um número par – proposição, verdadeira
c) A Terra é arredondada - proposição, verdadeira
d) x > 5 – asserção, mas não proposição
e) Esta declaração é falsa – asserção, mas não proposição
f) Você fala inglês? – nem asserção, nem proposição
g) Leia o livro texto – nem asserção, nem proposição

Lógica Matemática

- Observe que o valor verdade (V ou F) de uma proposição não é necessariamente conhecido.
- Exemplo: “A temperatura na superfície de Vênus é de 400ºC” é uma proposição.

Lógica Matemática

- É uma forma de representar raciocínios válidos:
  - Hoje é segunda ou terça-feira.
    Hoje não é segunda-feira.
    Logo, hoje é terça-feira.
  - Rembrandt pintou a Mona Lisa ou Michelângelo a pintou.
    Não foi Rembrandt que pintou a Mona Lisa.
    Logo, Michelângelo pintou a Mona Lisa.
  - P V Q (P ou Q)
    ~P (Não é o caso que P)
    ∴ Q (Q)

Lógica Matemática

- Sintaxe do Cálculo Proposicional
  - A sintaxe do Cálculo Proposicional especifica os símbolos e os modos de combiná-los para formar uma expressão válida da linguagem, as quais podem ser chamadas de “fórmulas bem formadas”(fbf).
  - Elementos Válidos:
    - Letras Sentenciais – P, Q, R, S, T, A1, b3, C, etc.
  - Conectivos ou Operadores Lógicos:
    - Negação – não é o caso que (~) (¬)
    - Conjunção – e (&) (^)
    - Disjunção – ou (V)
    - Condicional ou implicação: se ...então (→) (⇒)
    - Bicondicional: se e somente se (↔) (⇔)
  - Parênteses
    - (,)

Lógica Matemática

- Sintaxe do Cálculo Proposicional
  - Tendo já apresentado a lista de símbolos primitivos, o formação deles. Há apenas 3:

1. Uma letra sentencial sozinha é gramaticalmente correta ou uma fórmula bem formada.
2. Se qualquer fórmula **A** (tal como (PVQ) é bem formada, então também o é sua negação **~A** (~(PVQ) neste caso).
3. Se **A** e **B** são fórmulas bem formadas, então também o são (**A** ^ **B**), (**A** V **B**) e (**A**→**B**).

Lógica Matemática

- Sintaxe do Cálculo Proposicional
  - ~((P V Q) ^ R) -Esta fórmula é bem formada?
  - ((P V Q) ^ R) -Sim, se esta fórmula é bem formada (2).
  - ((P V Q) ^ R) -Esta fórmula é bem formada?
  - (P V Q) - Sim, se esta fórmula é bem formada, e
  - R -se esta fórmula também é bem formada (3).
  - (P V Q) -Esta fórmula é bem formada?
  - P -Sim, se esta fórmula for bem formada, e
  - Q -se esta fórmula for bem formada (3).
  - P -Esta fórmula é bem formada (1).
  - Q -(idem)
  - R -(idem)

Lógica Matemática

- Semântica do Cálculo Proposicional
  - Uma fbf pode ter uma interpretação a qual define a semântica da linguagem. Uma interpretação pode ser considerada como um mapeamento do conjunto das fbfs para um conjunto de valores de verdade {V, F} ou {Verdadeiro, Falso}.
  - A ^B é verdade se A é verdade e se B é verdade;
  - A V B é verdade se qualquer dos dois, A ou B é verdade;
  - A→B significa que se A é verdade, então B é verdade. Entretanto nada se sabe de B se A for falso.

Tabelas-Verdade

- As Tabelas-Verdade fornecem um teste rigoroso e completo para a validade de formas de argumento da Lógica Proposicional, além de se constituir em um algoritmo.
- Quando existe um algoritmo que determina se as formas expressáveis em um sistema formal são válidas ou não, esse sistema é dito decidível.

Tabelas-Verdade

1) Negação (operação “não”)

- Notação: ~P, não é verdade que P, ¬P
  - Definição:

P	~P
V	F
F	V

- Exemplo de negação
  - P: está chovendo hoje e
  - ~P: não é o caso de que está chovendo hoje

Tabelas-Verdade

2) Conjunção (operação “e”)

- Notação: P ^ Q, P e Q, P & Q
  - Definição:

P	Q	P ^ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- Exemplo de conjunção (P ^ Q):
  - P: está chovendo hoje e
  - Q: 3 < 5
  - P ^ Q: está chovendo hoje e 3 < 5

Tabelas-Verdade

3) Disjunção (operação “ou inclusivo”)

- Notação: P V Q, P ou Q
  - Definição:

P	Q	P V Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Exemplo de conjunção (P V Q):
  - P: está chovendo hoje ou
  - Q: 3 < 5
  - P V Q: está chovendo hoje ou 3 < 5

Tabelas-Verdade

Nota: O conectivo OU pode ser interpretado de duas maneiras:

OU inclusivo	OU exclusivo
“Eu passei em Matemática ou Eu rodei em Economia.”	“Eu vim de carro ou Eu vim de ônibus para a UFSC.”
Pelo menos uma das possibilidades ocorreu, mas poderia ter ocorrido ambas.	Somente uma das possibilidades pode ter ocorrido.

Tabelas-Verdade

3) Disjunção (operação “ou exclusivo”)

- Notação: P ⊕ Q, P ou exclusivo Q, P xor Q
  - Definição:

P	Q	P ⊕ Q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- Exemplo de conjunção exclusiva(P ⊕ Q):
  - P: está fazendo sol ou exclusivo
  - Q: está nevando hoje
  - P ⊕ Q: está fazendo sol hoje ou está nevando hoje.

Tabelas-Verdade

4) Condicional (operação “se ... então”)

- Notação: P → Q, Se P então Q, P implica Q
  - Definição:

P	Q	P → Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Exemplo de condicional (P → Q):
  - P: pegar o livro na biblioteca
  - Q: ler o livro esta noite
  - P → Q: Se eu pegar o livro na biblioteca, então vou lê-lo esta noite.

Tabelas-Verdade

4) Condicional (operação “se ... então”)

- Notação: $P \rightarrow Q$, Se P então Q, P implica Q
  - Definição:

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Exemplo de condicional ($P \rightarrow Q$):
  - P: pegar o livro na biblioteca
  - Q: ler o livro esta noite
  - $P \rightarrow Q$: Se eu pegar o livro na biblioteca, então vou lê-lo esta noite.

Tabelas-Verdade

4) Condicional (operação “se ... então”)

- Maneiras de expressar $P \rightarrow Q$:
  - se P, então Q
  - P é condição suficiente para Q
  - Q é condição necessária para P
  - P somente se Q
  - P é conseqüência de Q
- Na expressão $P \rightarrow Q$:
- \- P é chamado de hipótese ou antecedente e
- \- Q é c chamado de conclusão ou conseqüente

Tabelas-Verdade

4) Condicional (operação “se ... então”)

- EXEMPLO :

A sentença:

  - “ Fogo é uma condição necessária para a fumaça”
- Poderia ser reformulada como:
  - “Se há fumaça, então há fogo
- Logo:
  - O antecedente é “há fumaça”
  - O conseqüente é “há fogo”

Tabelas-Verdade

5) Bicondicional (operação “se e somente se”)

- Notação: $P \leftrightarrow Q$, P se e somente se Q
  - Definição:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Exemplo de bicondicional ($P \leftrightarrow Q$):
  - P: pegar o livro na biblioteca
  - Q: ler o livro esta noite
  - $P \leftrightarrow Q$: Vou pegar o livro na biblioteca se e somente se eu lê-lo esta noite.

Tabelas-Verdade

- Traduzindo fatos do mundo real para proposições
  - Exemplo: Encontrar a proposição que traduz a seguinte declaração do mundo real-

  “Você não pode andar de patins se você tem menos do que 1,20 m a não ser que você tenha mais do que 16 anos”.

  - Definindo:
    - P=você pode andar de patins
    - Q=você tem menos de 1,2 metros
    - R=você tem mais de 16 anos
  - A sentença pode ser escrita formalmente como:
    - $(Q \wedge \sim R) \rightarrow \sim P$
  - VAMOS CONSTRUIR A TABELA-VERDADE?

Tabelas-Verdade

- Algoritmo para Construir a Tabela-Verdade
  - A Tabela-Verdade de uma proposição composta por n variáveis é obtida por:
  1. As primeiras n colunas da tabela devem ser rotuladas com as letras sentenciais – outras colunas servirão para combinações intermediárias.
  2. Sob cada uma das primeiras colunas lista-se todas as 2^n possíveis combinações dos valores verdade das letras sentencias.
  3. Para cada linha computa-se o valor verdade resultante das proposições intermediárias, isto é, as letras sentenciais ligadas por conectivos ou precedidas de negação.

Tabelas-Verdade

- Exemplo:

P	Q	R	~P	~R	(Q ^ ~R)	(Q ^ ~R)→~P
F	F	F	V	V	F	V
F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V
V	V	F	F	V	V	F
V	V	V	F	F	F	V

Tabelas-Verdade

- Exercícios:
  - Construa a tabela-verdade de:
  1. (~Q V R) → P – Se você tem mais de 1,2m ou mais de 16 anos, então você pode andar de patins.
  2. P → (~Q V R) – Se você quer andar de patins, então deve ter mais de 1,2m ou mais de 16 anos.
  3. P → (Q ^ (P → R))
  4. (P V Q) → (R ↔ P)
  5. (P → Q) ↔ (~Q → ~P)

Classificação de Proposições

- Tautologia
  - Proposição que é sempre Verdade em todas as situações possíveis.
    - Exemplo: P V ~P
- Contradição ou Inconsistência
  - Proposição que é sempre Falsa em todas as situações possíveis.
    - Exemplo: P ^ ~P
- Contingência
  - Proposição que pode ser V ou F dependendo dos valores verdade de suas letras sentencias.

Equivalência de Fórmulas

- Sejam A e B duas fbfs e sejam P_1, P_2, ...,P_n as letras sentenciais que ocorrem em A e em B. Se os valores verdade de A e de B forem iguais para todos os 2^n possíveis valores verdade atribuídos a P_1, P_2, ..., P_n, então A e B são ditos equivalentes.
- Equivalências são bicondicionais que são tautologias.
- Um importante recurso usado na argumentação lógica é a substituição de uma proposição por outra que seja equivalente.

Equivalência de Fórmulas

- A seguir aparecem alguns exemplos de fórmulas que são equivalentes e cujas equivalências podem ser verificadas através de tabelas-verdade.
  - ~(~P) = P
  - A ^ A = A
  - A V A = A
  - (A ^ ~A) V B = B
  - A V ~A = B V ~B
- Exemplo: Mostre que P → Q = ~P V Q

P	Q	P → Q	~P V Q	(P → Q) ↔ (~P V Q)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Regras de Equivalência

- **Uma tabela com regras de equivalência de fórmulas também pode ser utilizada para provar a equivalência entre duas fórmulas sem que seja necessária a construção da tabela-verdade.**

Equivalência	Nome
P V P = P P ^ P = P	Idempotência
~(~P) = P	Dupla Negação
P V Q = Q V P P ^ Q = Q ^ P	Comutatividade
(P V Q) V R = P V (Q V R) (P ^ Q) ^ R = P ^ (Q ^ R)	Associatividade
~(P V Q) = ~P ^ ~Q ~(P ^ Q) = ~P V ~Q	Leis de De Morgan
P V (Q ^ R) = (PVQ) ^ (PVR) P ^ (Q V R) = (P^Q) V (P^R)	Distributividade

Regras de Equivalência

- Exemplo: Mostre que

(~P ^ (~Q ^ R)) V (Q ^ R) V (P ^ R) = R
(~P ^ (~Q ^ R)) V (Q ^ R) V (P ^ R) =
(~P ^ (~Q ^ R)) V (R ^ (Q V P) = (Distributividade)
((~P ^ ~Q) ^ R) V (R ^ (Q V P) = (Comutatividade)
((~P ^ ~Q) V (Q V P)) ^ R = (Distributividade)
(~(P V Q) V (P V Q)) ^ R = (De Morgan e Comutatividade)
(~A V A) ^ R =
Tautologia ^ R =
R

- As regras de equivalência podem ser utilizadas para simplificação de fórmulas, permitindo escrever fórmulas equivalentes mais simples e compactas, eliminando letras sentenciais supérfluas.

Regras de Equivalência

- Exercícios:

1. Simplifique a seguinte fbf:

A V (A ^ (~A ^B V C ^(A ^C)))
(A ^ B) V (A ^ ~B)
A ^ (A V B) ^ (A V ~B)

2. Mostre a equivalência

~(P V Q) = ~P ^ ~Q
~(PV(~P^Q)) = ~P ^ ~Q

Inferência

- Regras de Inferência:
  - Regras de Inferência são regras de reescrita que permitem produzir novas fbfs a partir de outras.
- Definições Básicas:
  - Axioma: Uma proposição que é assumida ser verdadeira (tautologia/verdade evidente).
  - Teorema: Uma proposição que pode ser demonstrada ser verdadeira.
- Demonstração de Teoremas:
  - Na Lógica Proposicional, Teoremas são Tautologias.
  - Objetivo: Estabelecer a verdade de um teorema.
  - Métodos: Tabelas-Verdade ou Regras de Inferência.

Inferência

- Teoremas – Argumentos Válidos
  - Grande parte dos teoremas são do tipo:

    (P1 ^ P2 ^ P3 ^ ... ^ Pn) → Q
    onde as Pi são as HIPÓTESES ou PREMISSAS
    e Q é a CONCLUSÃO.

- Na área da computação:
  - Verificar correção de programas,
  - Determinar se sistemas operacionais estão seguros,
  - Na área da Inteligência Artificial,
  - Computação gráfica, álgebra booleana, compiladores, etc.

Regras Básicas de Inferência

1. Modus Ponens (MP)
   - De um condicional e seu antecedente, podemos inferir o seu conseqüente.
   - A → B, A]- B   ou
   - ((A → B) ^ A) → B ←é uma tautologia
- Exemplos:
  - Se aquele animal for um gato, então aquele animal é preguiçoso.
    Aquele animal é um gato.
    Logo, aquele animal é preguiçoso.
  - Se Maria ou Juliana vier então a festa será alegre e divertida.
    Ou Maria ou Juliana virá a festa.
    Portanto, a festa será alegre e divertida.

Regras Básicas de Inferência

1. Modus Ponens (MP)

Ex.:
– P, P → Q, Q → R]- R

Prova:

1.	P	Premissa
2.	P → Q	Premissa
3.	Q → R	Premissa
4.	Q	1,2 MP
5.	R	3,4 MP

Regras Básicas de Inferência

2. Eliminação da Negação (~E)
   - De uma fbf ~(~A), podemos inferir A.
   - ~(~A)]- A
- Exemplo:
  - Não é o caso de que o lixo não está vazio.
    Logo, o lixo está vazio.

Ex.:

– ~P → ~(~Q), ~(~(~P))]- Q

Prova:

1. ~P → ~(~Q) Premissa
2. ~(~(~P)) Premissa
3. ~P 2 ~E
4. ~(~Q) 1,3 MP
5. Q 4 ~E

Regras Básicas de Inferência

3. Introdução da Conjunção (^I)
   - De quaisquer fbfs A e B podemos inferir A ^ B.
   - A, B]- A ^ B
4. Eliminação da Conjunção (^E)
   - De uma conjunção podemos inferir qualquer uma de suas sentenças.
   - A ^ B]- A
- Exemplos:
  - A sala está vazia.
    O professor está dando aula.
    Portanto, a sala está vazia E o professor está dando aula.
  - João E Marcelo jogarão futebol este sábado.
    Logo, Marcelo jogará futebol este sábado.

Regras Básicas de Inferência

Ex.:

– P → (Q ^ R), P]- P ^ Q

Prova:

1. P → (Q ^ R) Premissa
2. P Premissa
3. Q ^ R 1,2 MP
4. Q 3 ^E
5. P ^ Q 2,3 ^I

Regras Básicas de Inferência

5. Introdução da Disjunção (vI)
   - De uma fbf A, podemos inferir a disjunção de A com qualquer fbf.
   - A]- A v B
- Exemplos:
  - A sala está vazia.
    Portanto, a sala está vazia OU o professor está dando aula.

Ex.:

– P]- (P v Q) ^ (P v R)

Prova:

1. P Premissa
2. P v Q 1 vI
3. P v R 1 vI
4. (P v Q) ^ (P v R)2,3 ^I

Regras Básicas de Inferência

6. Eliminação da Disjunção (vE)
   - De fbfs da forma A v B, A→C e B →C, podemos inferir C.
- Exemplos:
  - Eu OU o meu irmão ficaremos em casa esta noite.
    Se eu ficar em casa, então a geladeira ficará vazia.
    Se meu irmão ficar, então ele esvaziará a geladeira.
    Logo, a geladeira ficará vazia.

Ex.:

– P v R, P → F, R → F]- F

Prova:

1. P v R Premissa
2. P →F Premissa
3. R →F Premissa
4. F 1,2,3 vE

Regras Básicas de Inferência

7. Introdução do Bicondicional (↔I)
   - De quaisquer fbfs da forma A→B e B →A, podemos inferir A ↔ B.
8. Eliminação do Bicondicional (↔E)
   - De uma fbf da forma A ↔ B, podemos inferir A→B e B →A.
- Exemplos:
  - Se houver um terremoto então a cidade será destruída e se a cidade foi destruída, então é porque houve um terremoto.
    Logo, a cidade será destruída se e somente se houver um terremoto.

Regras Básicas de Inferência

9. Prova do Condicional (PC)
   - Dada uma derivação de uma fbf B a partir de uma hipótese A, podemos descartar a hipótese e inferir $A \rightarrow B$. A Prova do Condicional é também chamada Teorema da Dedução e é normalmente utilizada se o conseqüente é da forma $A \rightarrow B$.
   - – I, (I ^ C) → ~S, ~S → ~A]- C → ~A

   Prova:

1.	I	Premissa
2.	(I ^ C) → ~S	Premissa
3.	~S → ~A	Premissa
4.	C	Hipótese
5.	(I ^ C)	1,4 ^I
6.	~S	2,5 MP
7.	~A	3,6 MP
8.	C → ~A	4,7 PC

Regras Básicas de Inferência

10. Redução ao Absurdo (RAA)
    - Dada uma derivação de uma contradição a partir de uma hipótese A, podemos descartar a hipótese e inferir ~A.

    Ex.:

    – P → Q, ~Q]- ~P

    Prova:

1.	P → Q	Premissa
2.	~Q	Premissa
3.	P	Hipótese
4.	Q	1,3 MP
5.	Q ^ ~Q	2,4 ^I (Contradição)
6.	~P	3,5 RAA

Regras Derivadas de Inferência

1. Modus Tollens (MT)
   - De fbfs da forma A → B e ~B, infere-se ~A.
- Exemplos
  - Se meu carro estiver no estacionamento, então estou na UFSC.

    Eu não estou na UFSC.

    Logo, meu carro não está no estacionamento.
  - Se meu animal de estimação for um gato ou um cão, então ele será um mamífero.

    Meu animal de estimação não é um mamífero.

    Portanto, meu animal não é nem um gato nem um cão.

Regras Derivadas de Inferência

2. Silogismo Hipotético (SH)
   - De fbfs da forma A → B e B →C, infere-se A→C.
- Exemplos
  - Se o pássaro está perdido, então a porta da gaiola está aberta.

    Se a porta da gaiola está aberta, então ele pode retornar a gaiola.

    Logo, se o pássaro está perdido, então ele pode retornar a gaiola.
  - Se meu time jogar bem, então ele vencerá suas partidas.

    Se meu time vencer suas partidas, então ele se classificará para as finais.

    Se meu time jogar bem, então ele se classificará para as finais.

Regras Derivadas de Inferência

3. Regra da Absorção (ABS)
   - De fbfs da forma A→B, infere-se A→(A^B).
4. Regra do Dilema Construtivo (DC)
   - De fbfs da forma A v B, A→C e B →D, infere-se C v D.
- Exemplo
  - A festa será na minha casa ou na sua.

    Se a festa for na minha casa, então minha casa ficará uma bagunça.

    Se a festa for na sua casa, então sua casa ficará uma bagunça.

    Portanto, ou a minha casa ou a sua ficará uma bagunça.

Regras Derivadas de Inferência

5. Regra da Repetição (RE)
   - De fbf da forma A, infere-se A.
6. Regra do Silogismo Disjuntivo (SD)
   - De fbfs da forma A v B e ~A, infere-se B.
- Exemplo
  - Ou o cachorro está dentro de casa ou ele está no pátio.

    O cachorro não está dentro de casa.

    Logo, o cachorro está no pátio.

Regras Derivadas de Inferência

- Exercícios:
  1. Se há um jogo de futebol na Ressacada, então viajar de avião é difícil. Se eles chegarem no horário no aeroporto, então viajar de avião não será difícil. Eles chegaram no horário no aeroporto. Logo, podemos concluir que não houve jogo de futebol na Ressacada.
  2. Verifique se os argumentos a seguir constituem argumentos válidos.
     a) Se este animal for um pássaro, então ele tem sangue quente.
        Se este animal for um réptil, então ele tem sangue frio.
        Este animal tem sangue quente ou frio.
        Logo, este animal ou é um pássaro ou é um réptil.
     b) Se a taxa para importação diminuir, então o comércio interno aumentará.Ou a taxa federal de desconto diminuirá ou o comércio interno não aumentará. A taxa para importação vai diminuir. Portanto, a taxa federal de desconto vai diminuir.

Regras Derivadas de Inferência

- Exercícios:
  3. Determine se os seguintes teoremas são válidos ou inválidos.
     a) $P \rightarrow Q$, $R \rightarrow \sim Q$, R]- $\sim P$.
     b) $A \rightarrow (B \vee C)$, $B \rightarrow \sim A$, $D \rightarrow \sim C$]- $A \rightarrow \sim D$.
     c) $B \wedge C$, $(B \leftrightarrow C) \rightarrow (H \vee G)$]- $H \vee G$.
     d) $(Q \wedge R) \rightarrow P$, $\sim Q$, $\sim R$]- $\sim P$.
     e) $P \rightarrow Q$, $(\sim Q \vee R) \wedge \sim R$, $\sim(\sim P \vee S)$]- $\sim S$.

Cálculo de Predicados

- A Lógica Proposicional possui um poder de representação limitado.
- Não é suficiente para expressar fatos simples como, por exemplo, o fato de duas leras sentenciais possuírem alguma característica em comum.
- O cálculo de predicados é uma extensão do cálculo proposicional em que se consideram também variáveis e quantificadores sobre variáveis.
- Os dois quantificadores mais importantes são o quantificador universal ($\forall$) e o quantificador existencial ($\exists$).

Cálculo de Predicados

- Quantificadores:
- São operadores lógicos que em vez de indicarem relações entre sentenças, expressam relações entre conjuntos designados pelas classes de atributos lógicos.
  - Quantificador Universal ($\forall$):
    - Este tipo de quantificador é formado pelas expressões “todo” e “nenhum”.
  - Quantificador Existencial ($\exists$):
    - Este tipo de quantificador é formado pelas expressões “existe um”, “existe algum”, “pelo menos um” ou “para algum”.

Cálculo de Predicados

- Exemplos:
  - Todo homem é mortal, ou seja, qualquer que seja x (do Universo), se x é Homem, então x é Mortal.
    - $\forall x\ (H(x) \rightarrow M(x))$.
  - Nenhum homem é vegetal, ou sejam qualquer que seja x, se x é Homem, em x NÃO É Vegetal.
    - $\forall x\ (H(x) \rightarrow \sim V(x))$.
  - Pelo menos um homem é inteligente, ou seja, existe pelo menos um x em que x seja Homem e x seja Inteligente.
    - $\exists x(H(x) \wedge I(x))$

Cálculo de Predicados

- Variáveis:
  - Designam objetos “desconhecidos” do Universo. “Alguém”. São normalmente representados por letras minúsculas de “u” a “z”.
- Letras Nominais:
  - Designam objetos “conhecidos” do Universo. “João”, “Pedro”, etc. São normalmente representados por letras minúsculas de “a” a “t”.
- Predicados:
  - Descrevem alguma coisa ou característica de um ou mais objetos. São normalmente denotados por letras maiúsculas.
  - João ama Maria: A(a,b)
  - João ama alguém: $\exists x A(a,x)$
  - João ama todo mundo: $\forall x\ A(a,x)$

Cálculo de Predicados

- Sintaxe do Cálculo de Predicados
  - Fórmulas Atômicas:
    - É uma letra predicativa, seguida por zero ou mais letras nominais ou variáveis.
  - Fórmulas Bem Formadas:
    - Uma Fórmula Atômica é uma Fórmula Bem Formada;
    - Se P é uma fbf, então ~P também o é;
    - Se P e Q são fbfs, então (P ^ Q), (P v Q), (P→Q), (P↔Q) também o são;
    - Se P(x) é uma fbf, então ∃x(P(x)) e ∀x(P(x)) também o são.
    - Ex.: Seja P = F(a) ^ G(a,b), então são fbfs:

      ∀x(F(x) ^ G(a,b))

      ∀x(F(x) ^ G(x,b))

      ∀x(F(a) ^ G(a,x))

      ∃x(F(x) ^ G(a,b))

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Todas as regras definidas no Cálculo Proposicional continuam válidas no Cálculo de Predicados, apenas referenciando-as para os quantificadores.
    - Ex.: ~F(a) v ∃xF(x), ∃xF (x)→P]- F(a) →P.

Prova:

1.	~F(a) v ∃xF(x)	Premissa
2.	∃xF (x)→P	Premissa
3.	F(a)	Hipótese
4.	~~F(a)	3 DN
5.	∃xF(x)	1,3 SD
6.	P	2,5 MP
7.	F(a) →P	3,6 PC

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  - Intercâmbio de Quantificadores

1. ~(∀x ~F(x)) = ∃xF(x)
2. ~(∀x F(x)) = ∃x~F(x)
3. ∀x ~F(x) = ~(∃xF(x))
4. ∀x F(x) = ~(∃x~F(x))

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados

1. Eliminação Universal (EU)
   - De uma fbf quantificada universalmente ∀x F(x), infere-se uma fbf da forma F(a), a qual resulta de se substituir cada ocorrência da variável x em F por uma letra nominal a.

- Ex.: ∀x (H(x)→M(x)),H(s)]- M(s)

Prova:

1.	∀x (H(x)→M(x))	P
2.	H(s)	P
3.	H(s)→M(s)	1 EU
4.	M(s)	2,3 MP

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados

2. Introdução do Universal (IU)
   - De uma fbf contendo uma letra nominal a, QUE NÃO OCORRE EM QUALQUER PREMISSA OU EM QUALQUER HIPÓTESE, infere-se uma fbf da forma ∀xF(x), onde F(x) é o resultado de se substituir todas as ocorrências de a em F por uma variável x QUE NÃO OCORRA em F.

- Ex.: ∀x (P(x)→C(x)), ∀x (C(x)→V(x))]- ∀x(P(x)→V(x))

Prova:

1.	∀x (P(x)→C(x))	P
2.	∀x (C(x)→V(x))	P
3.	P(a)→C(a)	1 EU
4.	C(a)→V(a)	2 EU
5.	P(a)→V(a)	3,4 SH
6.	∀x(P(x)→V(x))	5 IU

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados

3. Introdução do Existencial (IE)
   - De uma fbf F contendo uma letra nominal a, infere-se uma fbf da forma ∃xF(x), onde F(x) é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de a em F por uma variável x QUE NÃO OCORRA em F.
   - a pode ocorrer em uma hipótese não utilizada ainda, ou em uma premissa;
   - a variável x não precisa substituir todas as ocorrências de a em F;
   - IE permite introduzir somente um quantificador existencial por vez e somente do lado esquerdo da fórmula.

- Ex.: ∀x (F(x) v G(x))]- ∃x (F(x) v G(x))

Prova:

1.	∀x (F(x) v G(x))	P
2.	F(a) v G(a)	1 EU
3.	∃x(F(x) v G(x))	2 IE

Cálculo de Predicados

- Regras de Inferência para o Cálculo de Predicados
  4. Eliminação do Existencial (EE)
     - De uma fbf quantificada existencialmente $\exists x F(x)$ podemos inferir F(a), contanto que a letra nominal NÃO OCORRA em F(x), NEM EM QUALQUER HIPÓTESE, NEM EM QUALQUER PASSO ANTERIOR DA DERIVAÇÃO.
  - Ex.: $\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$]- $\exists x\ F(x)$

  Prova:

  1. $\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$ P
  2. $F(a) \wedge G(a)$ 1 EE
  3. $F(a)$ 2 ^E
  4. $\exists x\ F(x)$ 3 IE