Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC
Departamento de Informática e de Estatística - CTC - INE
INE5381 - Fundamentos Matemáticos para a Informática
Prof. Mauro Roisenberg

Lista de Exercícios

1. Mostre que as seguintes funções são primitivas recursivas.

   (a) Função antecessor, A:
   Dica :
   $A(0) = 0$
   $A(y+1) = y$

   (b) Função subtração própria, $\dot{-}$:
   Dica :
   Utilize a função primitiva recursiva acima.

   (c) Função potência, $f(x, y) = x^y$:
   Dica :
   $f(x, 0) = sg(x)$
   $f(x, y+1) = x * f(x, y)$

2. Mostre que a função $Pr(x)$ que calcula a paridade de um número é primitiva recursiva.
   Note que $Pr(0) = 0$, $Pr(1) = 1$, $Pr(2) = 0$, $Pr(3) = 1$, ...

3. Motre que a função Fatorial de um número ($x!$) é primitiva recursiva.
   Note que $0! = 1$, $1! = 0! * 1$, $2! = 1! * 2$, ...

4. Mostre que $\{(x, x) | x \in \mathcal{N}\}$ que define a relação de igualdade é primitiva recursiva.
   Dica :
   A função característica da relação é tal que
   $f(x, y) = 1$ para $x = y$ e $f(x, y) = 0$ para $x \neq y$.

5. Mostre que $\{(x, y) | y \geq x \wedge y \in \mathcal{N} \wedge x \in \mathcal{N}\}$ que define a relação de ordem maior ou igual é primitiva recursiva.
   Dica :
   A função característica da relação é tal que
   $f(x, y) = 1$ para $y \geq x$ e $f(x, y) = 0$ para $y < x$.

6. Descreva uma máquina de estados finitos que leia uma seqüência de 0's e 1's de uma fita de entrada. A máquina escreve 1 na fita de saída se a fita de entrada contém um número par de 1's, e zero caso contrário.

7. Desenhe o diagrama de transição de estados da máquina de estados finitos cuja operação é definida da seguinte maneira: Ela só deve aceitar seqüências da fita de leitura tais que, sempre que aparecer um bit 1, ele deve ser sempre seguido de pelo menos dois bits zeros. A máquina deve escrever 1 na fita de saída enquanto a seqüência estiver correta e 0 caso contrário.

8. Qual a diferença básica entre uma Máquina de Turing e uma Máquina de Estados Finitos?

9. Seja S um conjunto não vazio e $P(S)$ seu conjunto potência. Para quaisquer conjuntos A e $B \in P(S)$, podemos definir as operações $+$ e $\times$ em $P(S)$ como:

$$\begin{aligned} A + B &= (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \ B) \cup (B \cap \ A) \\ A \times B &= A \cap B \text{ ($\times$ não é o produto cartesiano)} \end{aligned}$$

   (a) Quais seriam os elementos identidade para as operações de $+$ e $\times$ respectivamente?

   (b) Mostre que A é o inverso de A com relação à operação de $+$ para qualquer $A \in P(S)$.

10. Seja $\mathcal{I}$ o conjunto dos números ímpares positivos. Mostre que $(\mathcal{I}, +)$ não é um sistema algébrico, enquanto $(\mathcal{I}, \times)$ é um monóide.

11. Quais as propriedades dos seguintes sistemas algébricos:

   - semigrupo
   - monóide
   - grupo
   - anel

12. Seja $\mathcal{E}$ o conjunto dos números pares positivos excluindo o zero. Diga se os seguintes sistemas algébricos são semigrupos ou monóides:
$(\mathcal{E}, +)$ e $(\mathcal{E}, \times)$.