INE 5118 – Turma 05202 – Lista de Exercícios: Processos Estocásticos

1) Imagine um processo estocástico de Markov, de parâmetros e estados discretos (cadeia de Markov). Este processo tem dois estados possíveis: 1 e 2. Sua matriz de transição de estados (obtidas por histórico) é descrita a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}$$

Suponha que o processo inicia no estado 1.

a) Calcule as probabilidades de estado após dois períodos de tempo (t = 2). R.: 0,37; 0,63
b) Calcule as probabilidades limite de estado. R.: 0,3636; 0,6364.
c) Calcule as probabilidades de estado para vários períodos de tempo (1, 2, 3, ...), até obter a sua estabilização. Construa um gráfico com as probabilidades obtidas. Sugestão: use algum aplicativo computacional.

2) Um sistema de monitoramento pode ser modelado por um processo estocástico de Markov, de parâmetros e estados discretos (cadeia de Markov). Este processo tem três estados possíveis: 1 (operando), 2 (em stand-by) e 3 (falhado). Sua matriz de transição de estados (obtidas por histórico) é descrita a seguir:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 \\ 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,8 & 0,15 & 0,05 \end{bmatrix}$$

a) Calcule as probabilidades de estado após dois períodos de tempo (t = 2), supondo:
   a.1 – Que o sistema inicia no estado de operação. R.: 0,79; 0,115; 0,095
   a.2 – Que o sistema inicia no estado de stand-by. R.: 0,78; 0,125; 0,095
   a.3 – Que o sistema inicia no estado de falha. R.: 0,785; 0,1175; 0,0975
b) Calcule as probabilidades limite de estado. R.: 0,78836; 0,116402; 0,095238.
c) Calcule as probabilidades de estado para vários períodos de tempo (1, 2, 3, ...), até obter a sua estabilização. Construa um gráfico com as probabilidades obtidas. Sugestão: use algum aplicativo computacional.

3) O exército está avaliando a qualificação de uma bateria de artilharia. No último exercício foram disparados 200 projéteis. Destes, 130 atingiram os alvos designados. Sabe-se também que dentre os 130 acertos, houve 100 vezes em que um acerto foi seguido por outro acerto. E, dentre os erros, houve 60 vezes em que um erro foi seguido por outro erro.
a) Obtenha a matriz de transição do processo, supondo que há apenas 2 estados possíveis: acertar ou errar o alvo. R.: (0,769231 0,230769; 0,142857 0,857143).
b) Calcule as probabilidades de estado após dois períodos de tempo (t = 2), supondo:
   b.1 – Que o processo inicia com a bateria acertando o alvo. R.: 0,624683; 0,376317
   b.2 – Que o processo inicia com a bateria errando o alvo. R.: 0,232339; 0,767661
c) Calcule as probabilidades limite de estado. R.: 0,382353; 0,617647
d) Com as probabilidades limite acima, o que você acha da qualificação da bateria?
d) Quantas vezes um acerto deveria ser seguido por outro acerto para que a probabilidade limite de acertar o alvo fosse maior do que 0,5? R.: no mínimo 112 vezes.

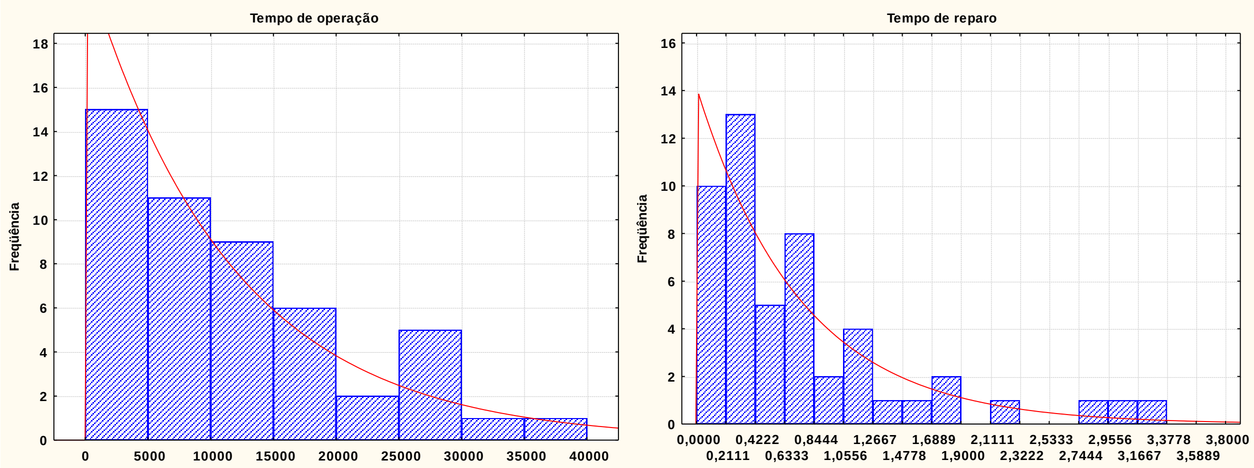
4) Um fornecedor da Infraero está avaliando o desempenho de seu novo modelo de radar. Abaixo estão descritos os tempos para a falha e os tempos para o reparo de 50 observações:
Tempos para a falha (horas)

6521,22	16755,86	2826,9	2004,27	16203,6	5956,91	11800,84	2031,82	9665,26	35361,98
28735,72	12896,41	360,23	120,19	24746,8	16844,33	20737,6	25263,06	2448,78	977,31
25422,34	28660,12	18066,77	15708,94	11983,01	3499,08	2451,02	13742,05	10796,71	8557,82
6994,48	25027,36	34041,49	9694,98	8454,54	5228,4	442,57	14344,16	7373,8	2428,18
18175,13	13406,07	1856,66	2963,07	2585,46	8235,28	12429,53	14464,34	1334,96	6636,55

Tempos para o reparo (horas)

0,23	0,14	0,81	0,51	0,23	0,27	0,06	0,7	0,29	0,7
0,21	0,66	3,12	0,8	3,33	0,44	0,5	0,43	1,22	0,23
1,72	1,33	1,06	0,31	0,14	0,28	1,19	0,29	2,17	0,22
0,83	0,78	0,92	0,03	0,04	0,24	0,04	0,1	0,28	1,59
0,25	1,82	0,97	0,13	1,18	0,07	2,78	0,35	0,51	0,82

Abaixo estão os histogramas dos tempos:



a) Com base apenas nos gráficos, é possível considerar que os tempos de operação (tempos para a falha) e para o reparo seguem distribuições exponenciais? Justifique.
b) Supondo que os tempos sigam distribuições exponenciais, encontre as taxas de falha e de reparo do novo modelo de radar. R.: 0,000087 falhas/hora; 1,339764 reparos/hora.
c) Com os dados do item b, qual é a probabilidade do radar operar? R.: 0,9999354
d) Com a taxa de falha obtida no item b, qual deveria ser a taxa de reparo do radar para que a probabilidade de falha não passasse de 0,00005? R.: 1,732223 reparos/hora.

5) O principal componente eletrônico de um sistema de controle pode assumir apenas dois estados: operando e em falha. O componente pode ser reparado, quando retorna à operação normal. O ciclo operação-falha pode ser modelado por um processo de Markov. Sabe-se que os tempos de operação (tempos para a falha) e os tempos para o reparo do componente seguem uma distribuição exponencial com os seguintes valores médios, respectivamente: 350 horas, 12 horas.
a) Encontre as probabilidades limite de estado do componente. R.: 0,966851; 0,033149
b) De quanto deveria ser o tempo médio para o reparo de maneira a obter uma probabilidade limite de operar de no mínimo 0,98? Suponha que o tempo médio para a falha permanece igual a 350 horas. R.: < 7,14 horas.
c) Quanto deveria ser o tempo médio para a falha (tempo de operação) de maneira a obter uma probabilidade limite de operar de no mínimo 0,98? Suponha que o tempo médio para o reparo permanece igual a 12 horas. R.: > 588 horas.
d) Qual dos dois cursos de ação, reduzir o tempo de reparo ou aumentar o tempo de operação, é o mais apropriado? Justifique.
e) Encontre as probabilidades transitórias dos estados do componente, para t variando de 1 a 200, supondo:

e.1 – Que o componente inicia em operação.

e.2 – Que o componente inicia em falha.

Construa um gráfico com as probabilidades obtidas. Sugestão: use algum aplicativo computacional.

6) Sejam agora dois radares idênticos aos da questão 4 que tenham taxas de falha e de reparo constante, operando em conjunto. O sistema é estruturado de tal forma que não há transição direta do estado “ambos operando” para o estado “ambos falhados” e vice-versa.
a) Calcule as probabilidades limite do sistema formado pelos dois radares estar nos estados: ambos operando, apenas um operando, nenhum operando. R.: 0,99987; 0,00013; 0,00000
b) Recentemente houve uma mudança na taxa de falha que aumentou para 0,38 falhas/hora. Repita o item a, supondo que a taxa de reparo não se modificou. R.: 0,60690; 0,34427; 0,048823.
c) Supondo ainda a situação da letra b, qual deveria ser o valor da taxa de falha para que a probabilidade de ambos os radares falharem seja de no máximo 0,01? R.: 0,14886 falhas/hora.