

Variáveis Aleatórias

Conceitos, Discretas, Contínuas, Propriedades

Itens 5.1 e 6.1

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
 - número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas;
 - número de itens defeituosos em uma amostra retirada, aleatoriamente, de um lote;
 - número de defeitos em um azulejo que sai da linha de produção;
 - número de pessoas que visitam um determinado *site*, num certo período de tempo;

Variável aleatória

- Uma **variável aleatória** pode ser entendida como uma variável quantitativa, cujo resultado (valor) depende de fatores aleatórios.
- Exemplos:
 - volume de água perdido por dia, num sistema de abastecimento;
 - resistência ao desgaste de um certo tipo de aço, num teste padrão;
 - tempo de resposta de um sistema computacional;
 - grau de empeno em um azulejo que sai da linha de produção.

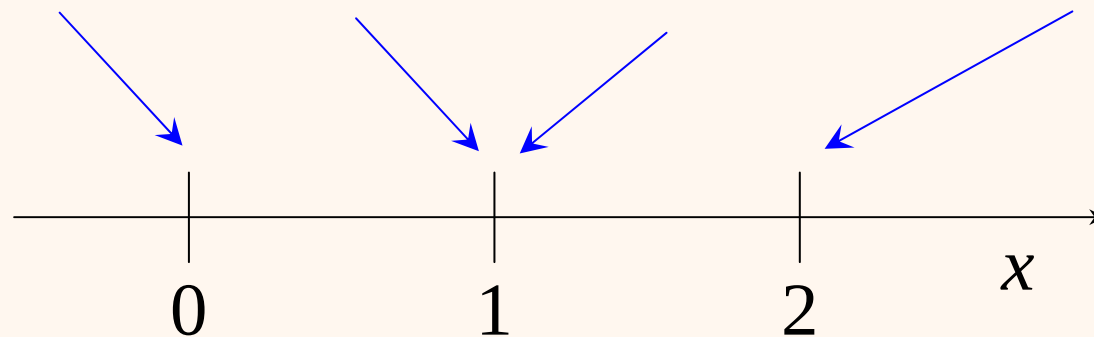
Variável aleatória

- Formalmente, uma **variável aleatória** é uma função que associa elementos do espaço amostral ao conjunto de números reais.

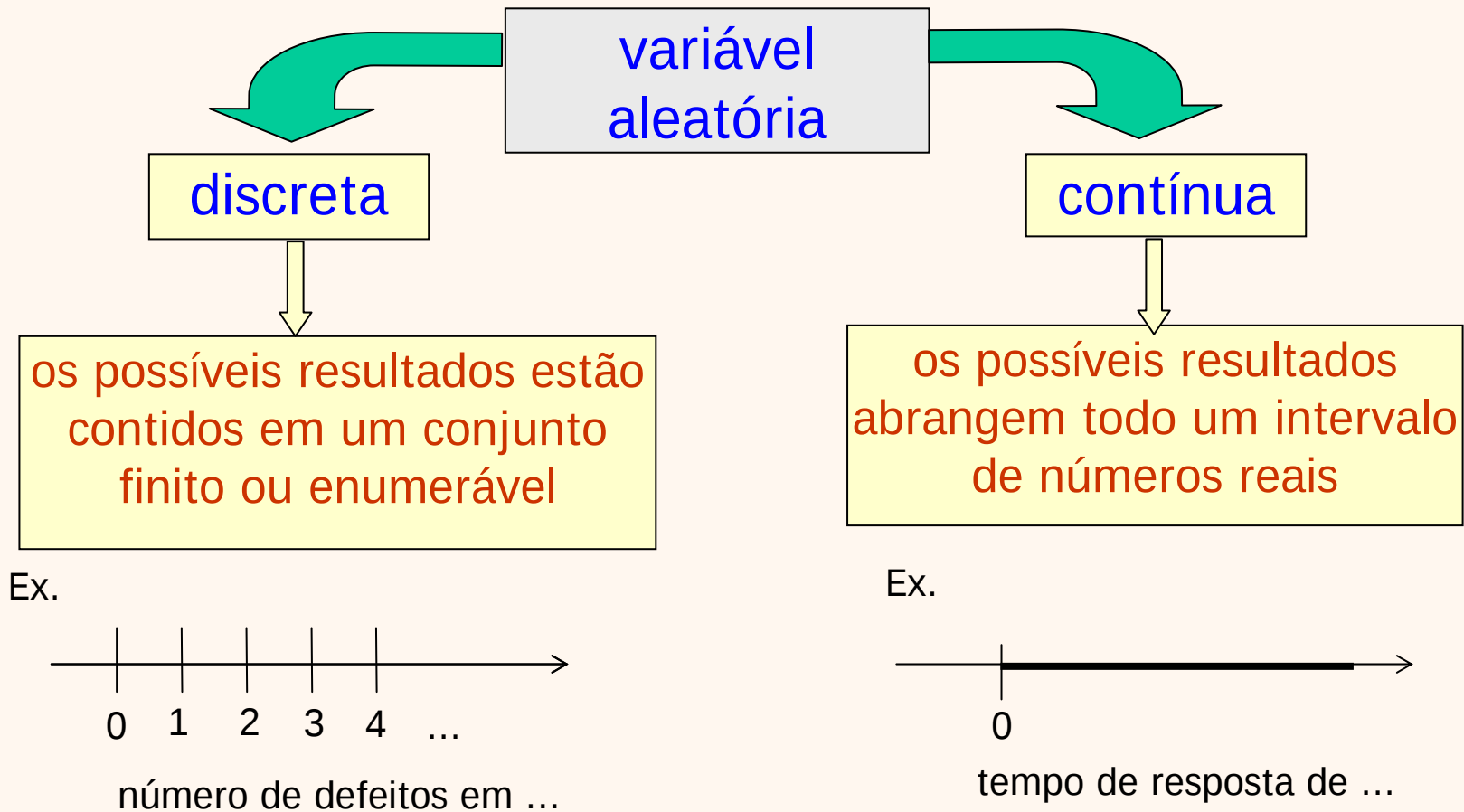
X = número de coroas obtido no lançamento de 2 moedas

$$\Omega = \{(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)\}$$

X:



Variável aleatória



Variável aleatória discreta: função de probabilidade

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

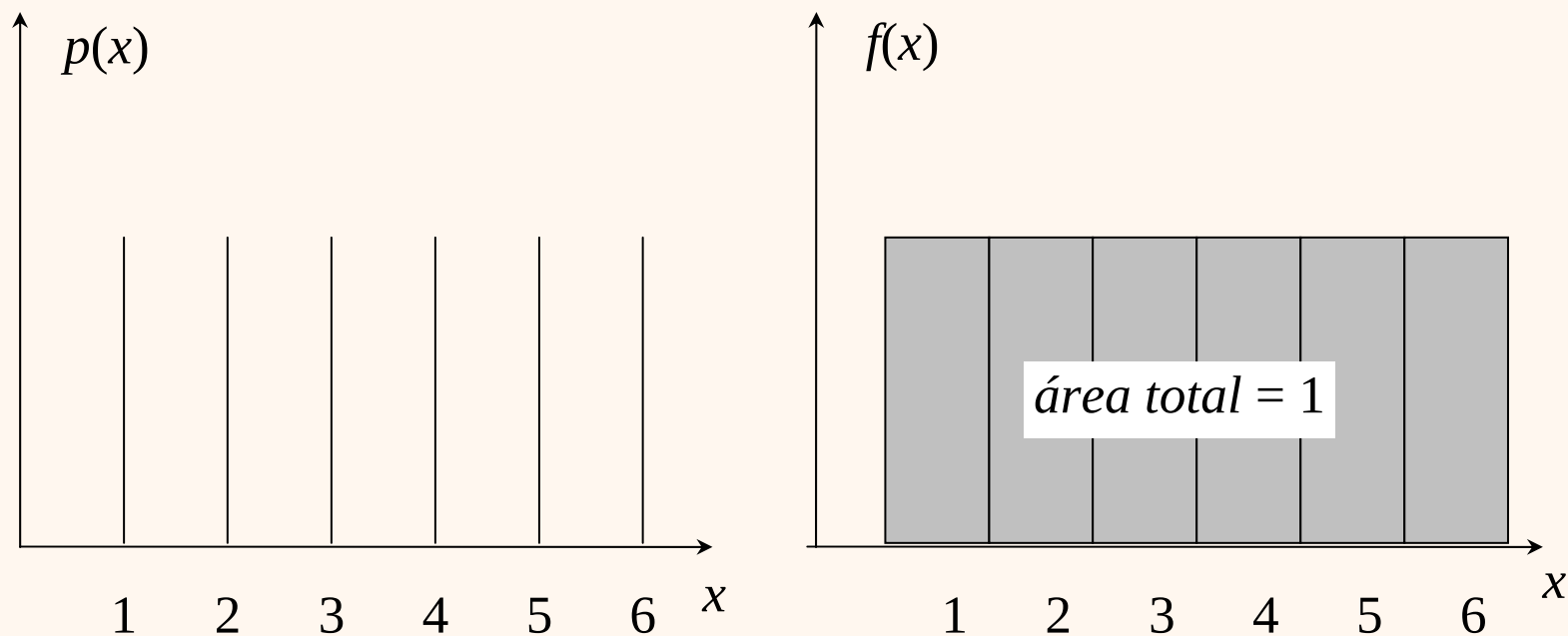
satisfazendo:

$$p(x_i) \geq 0$$

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

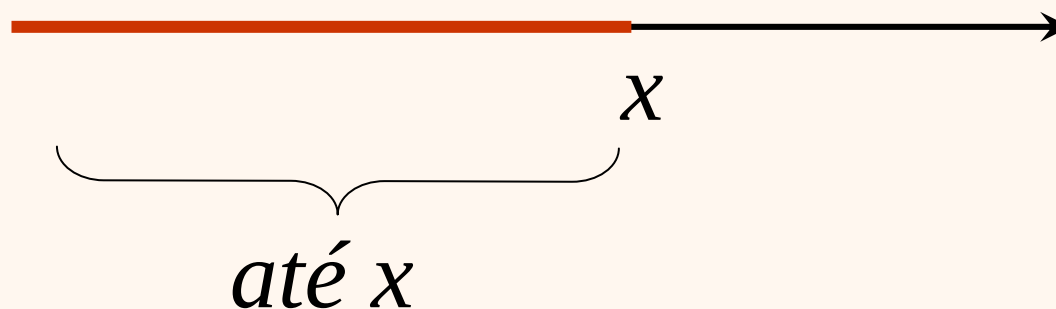
Variável aleatória discreta: função de probabilidade

- **X** = número obtido no lançamento de um dado comum.



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

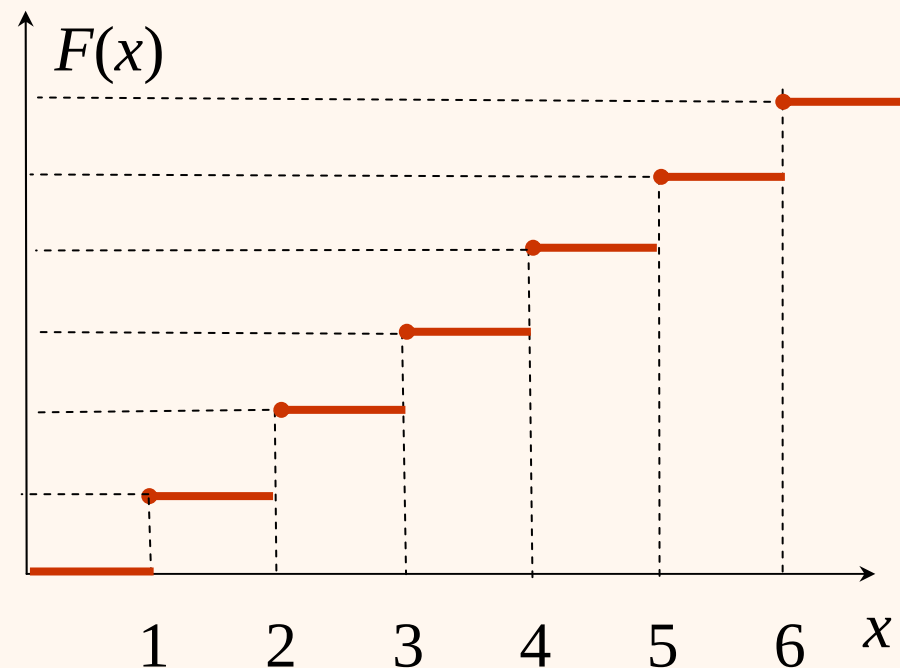
$$F(x) = P(X \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



Variável aleatória discreta: Função de distribuição acumulada

- X = número obtido no lançamento de um dado comum.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & \text{se } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & \text{se } 5 \leq x < 6 \\ 1 & \text{se } x \geq 6 \end{cases}$$

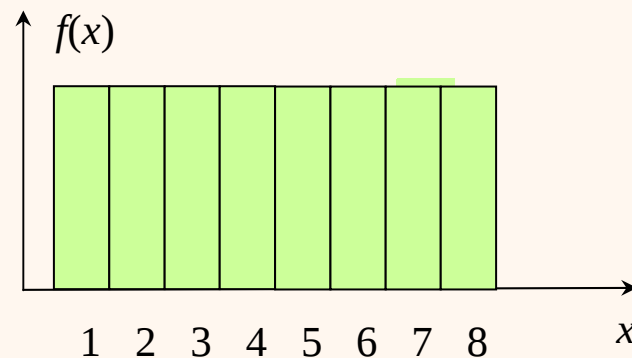
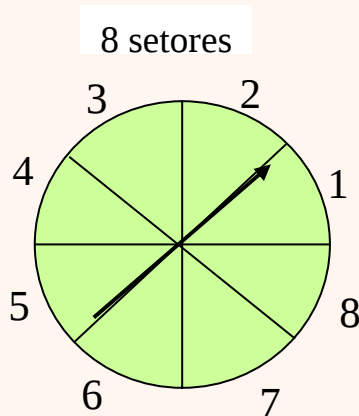
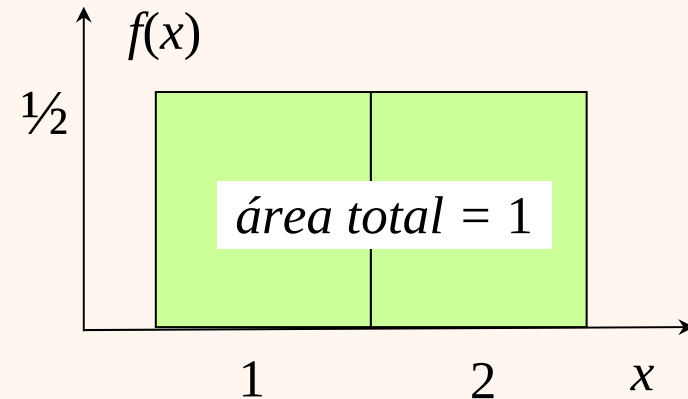
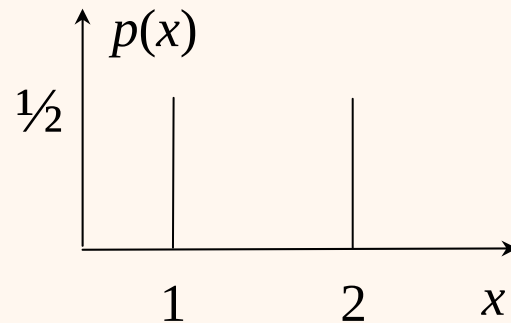
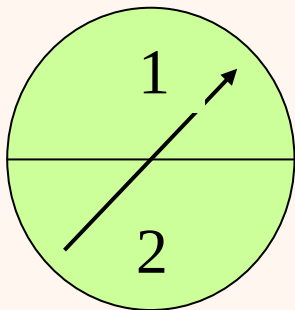


Variáveis aleatórias contínuas

- tempo de resposta de um sistema computacional;
 - rendimento de um processo químico;
 - tempo de vida de um componente eletrônico;
 - resistência de um material; etc.
- Variáveis aleatórias discretas com grande número de possíveis resultados (podem ser aproximadas para contínuas):
 - número de transações por segundo de uma CPU;
 - número de defeitos numa amostra de 5.000 itens; etc.

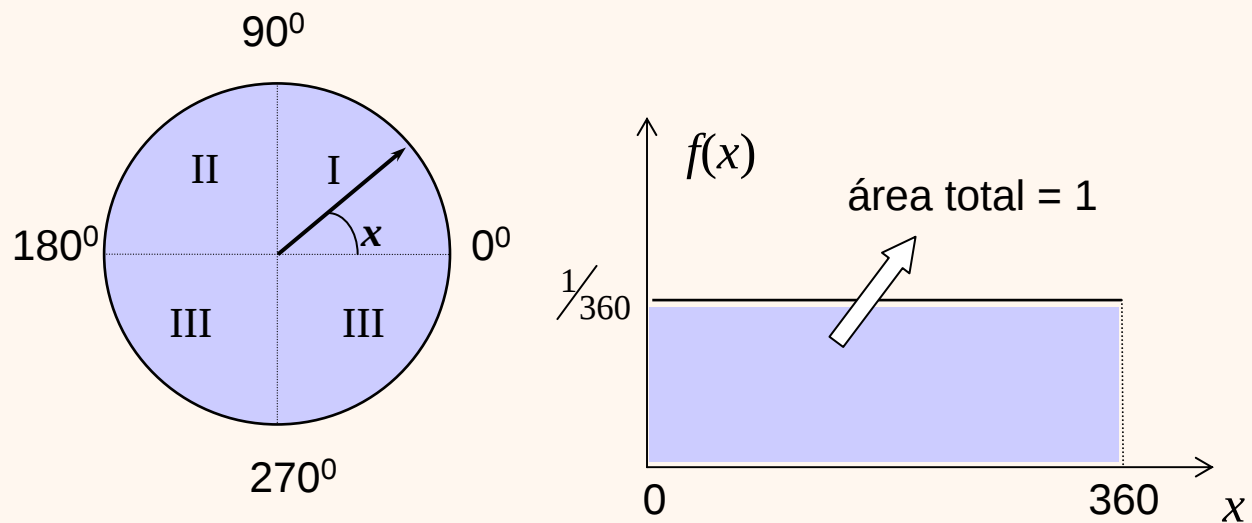
Variável aleatória: discreta x contínua

Discreta

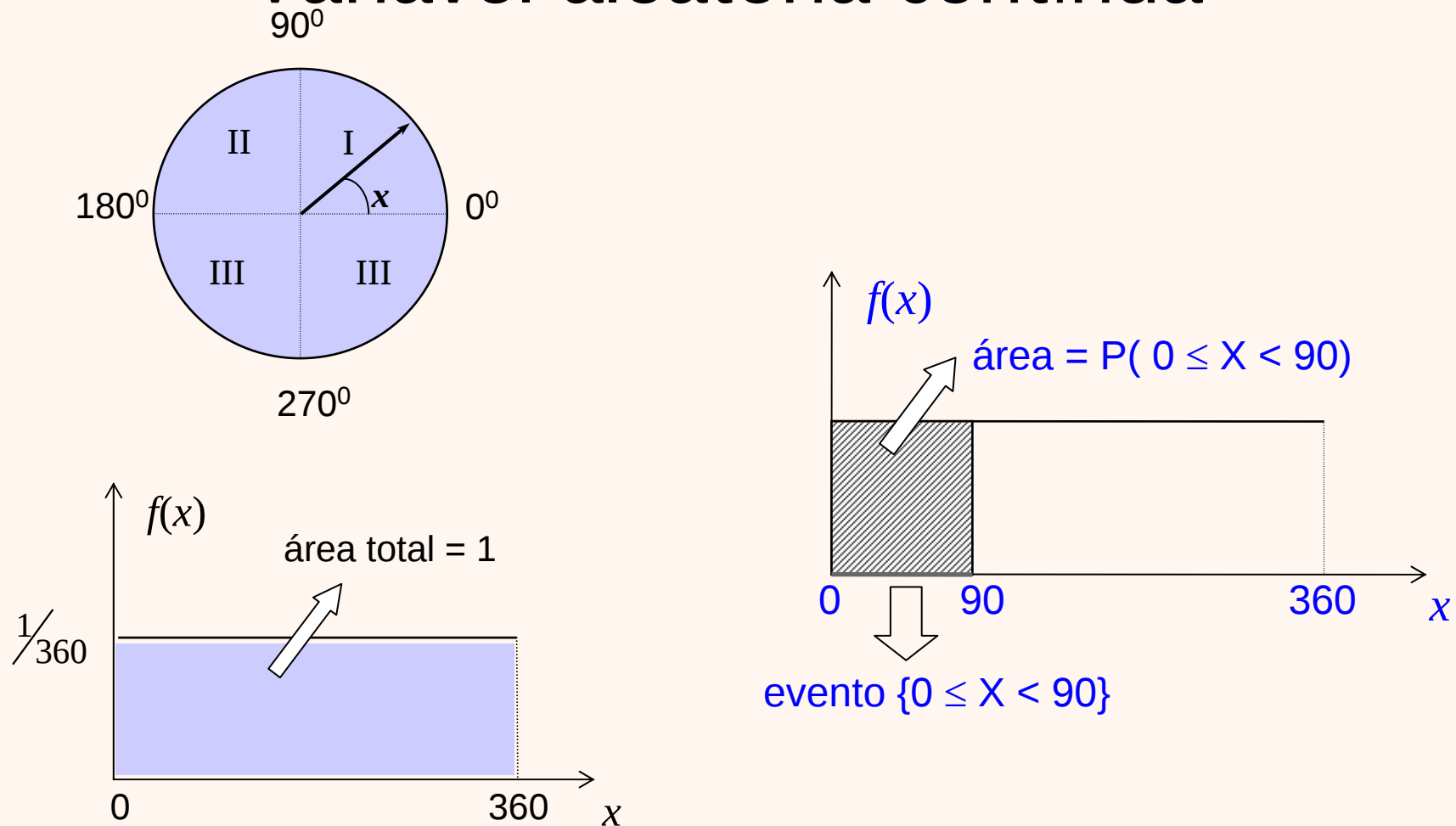


Variável aleatória: discreta x contínua

Contínua



Variável aleatória contínua



Variável aleatória contínua

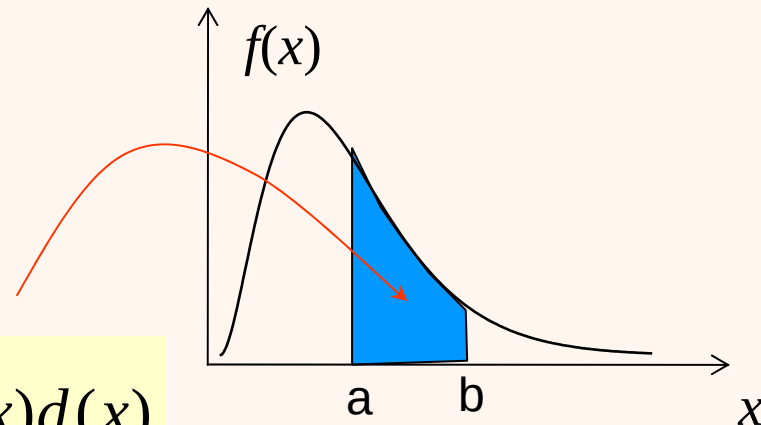
- As probabilidades de eventos associados a uma variável aleatória contínua X podem ser calculadas através de uma **função densidade de probabilidade** f , que deve satisfazer:

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad e$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d(x) = 1$$

Se $A = [a, b]$, então

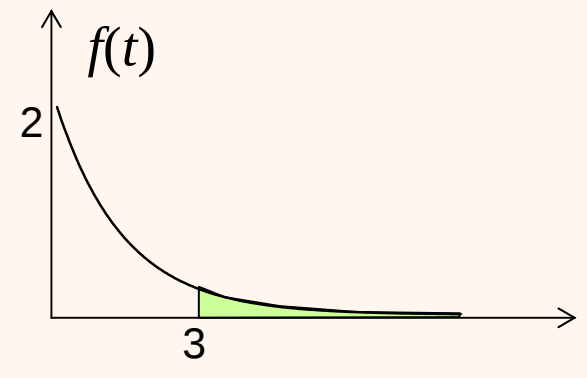
$$P(A) = \int_a^b f(x) d(x)$$



Variável aleatória contínua

- Exemplo 6.3

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



$$P(T > 3) = \int_3^{+\infty} f(t)dt = \int_3^{+\infty} 2e^{-2t}dt = 2 \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_3^{+\infty} = 0 + e^{-2(3)} = e^{-6}$$

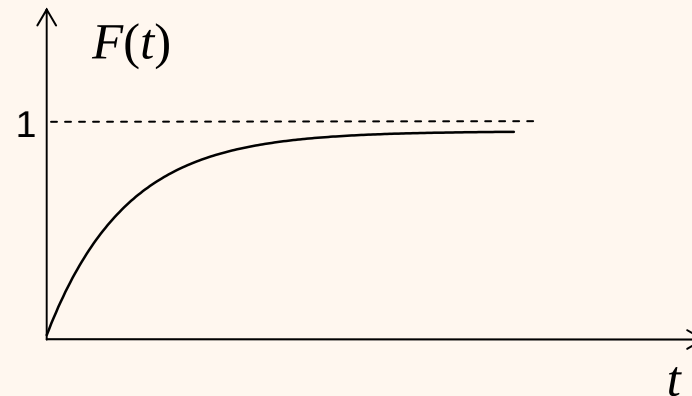
Variável aleatória contínua

- Função de distribuição acumulada

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(s)ds, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Exemplo 6.3

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-2t}, & \text{para } t \geq 0 \\ 0, & \text{para } t < 0 \end{cases}$$



Variável aleatória discreta: Valor esperado

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\mu = E(X) = \sum_{j=1}^k x_j p_j$$

Variável aleatória discreta: Variância

Valores possíveis	Probabilidades
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
...	...
x_k	p_k
Total	1

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{j=1}^k (x_j - \mu)^2 p_j$$

Ou:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

onde: $E(X^2) = \sum_{j=1}^k x_j^2 p_j$

Desvio padrão:

$$\sigma = DP(X) = \sqrt{Var(X)}$$

Variável aleatória contínua

- Valor esperado e variância

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx \quad \text{ou} \quad V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

$$\text{onde: } E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Propriedades do valor esperado e variância

$$a) E(c) = c$$

$$b) E(X + c) = E(X) + c$$

$$c) E(cX) = cE(X)$$

$$d) E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$e) E(X - Y) = E(X) - E(Y)$$

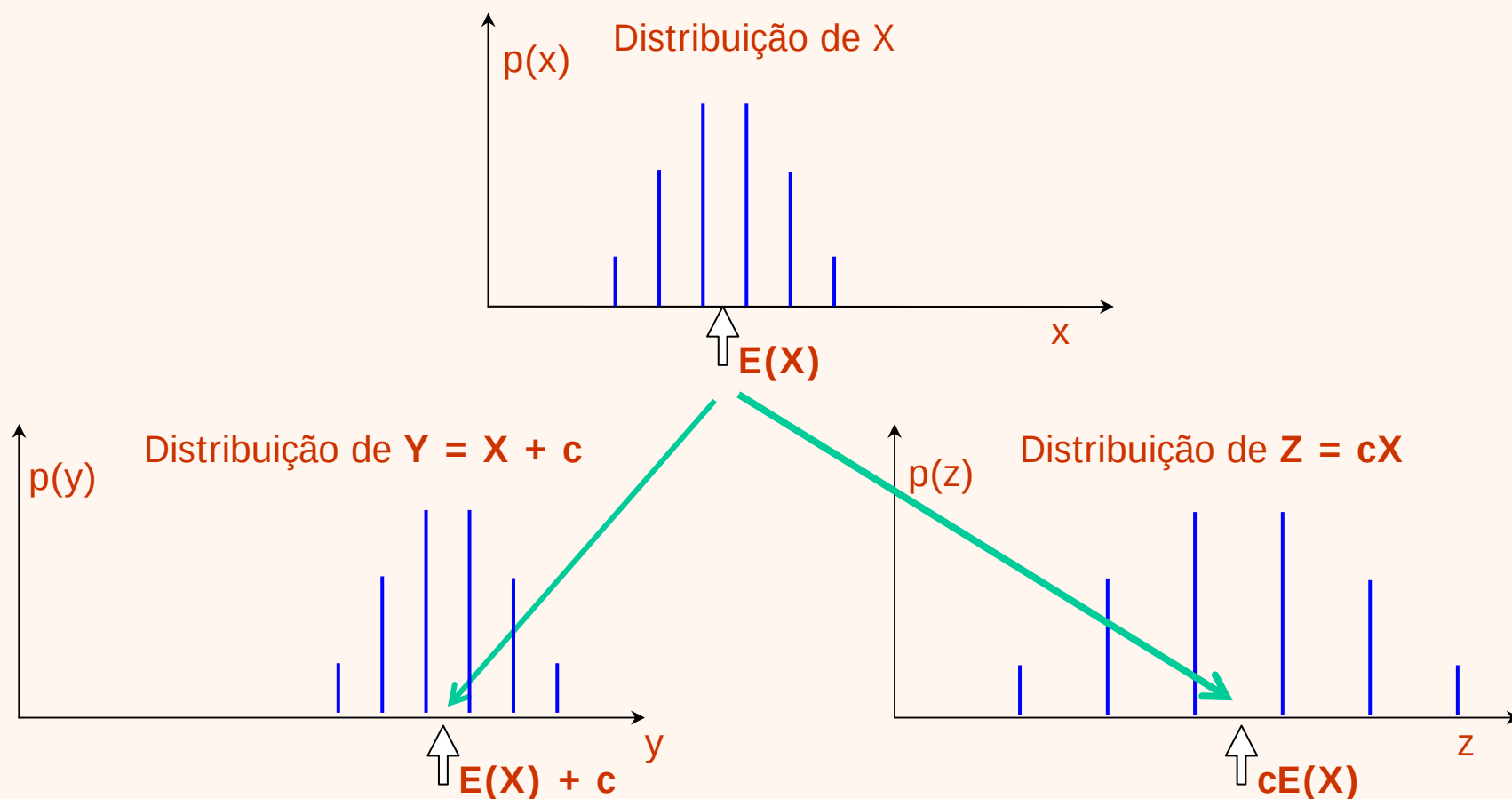
$$a) V(c) = 0$$

$$b) V(X + c) = V(X)$$

$$c) V(cX) = c^2 V(X)$$

$$d) DP(cX) = |c| DP(X)$$

Propriedades do valor esperado e variância



Variáveis aleatórias independentes

- $X_1, X_2, \dots, X_n$ podem ser consideradas **variáveis aleatórias independentes** se o conhecimento de uma não altera as distribuições de probabilidades das demais.
- Vale para **variáveis aleatórias independentes**:
$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$
$$V(X - Y) = V(X) + V(Y)$$