Modelagem de um sistema por cadeias de Markov

- Sistemas "sem memória": somente o estado imediatamente anterior influencia o estado futuro.
- Processo estacionário: probabilidades de transição de um estado para outro são as mesmas em qualquer instante de tempo.
- Problema:
  - Encontrar as probabilidades de transição a partir de dados históricos ou experimentais;
  - Encontrar as probabilidades limites do sistema estar em cada um dos seus estados.

Matriz de transição

- Matriz de transição estocástica (2 estados):

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Soma de cada linha = 1

- P_{ij} = probabilidade da transição do estado i para o estado j, depois de 1 intervalo de tempo, dado que o sistema estava no estado i no início do intervalo.

Probabilidades de Estados

- As probabilidades do sistema estar nos estados 1 e 2 após n períodos de tempo:

$$\begin{bmatrix} P_1^{\,n} & P_2^{\,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{\,0} & P_2^{\,0} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}^n$$

- P_1^0 e P_2^0 são as condições iniciais do sistema: se o sistema partir do estado 1, $P_1^0 = 1$ e $P_2^0 = 0$, e vice-versa caso partir do estado 2.

Probabilidades limite

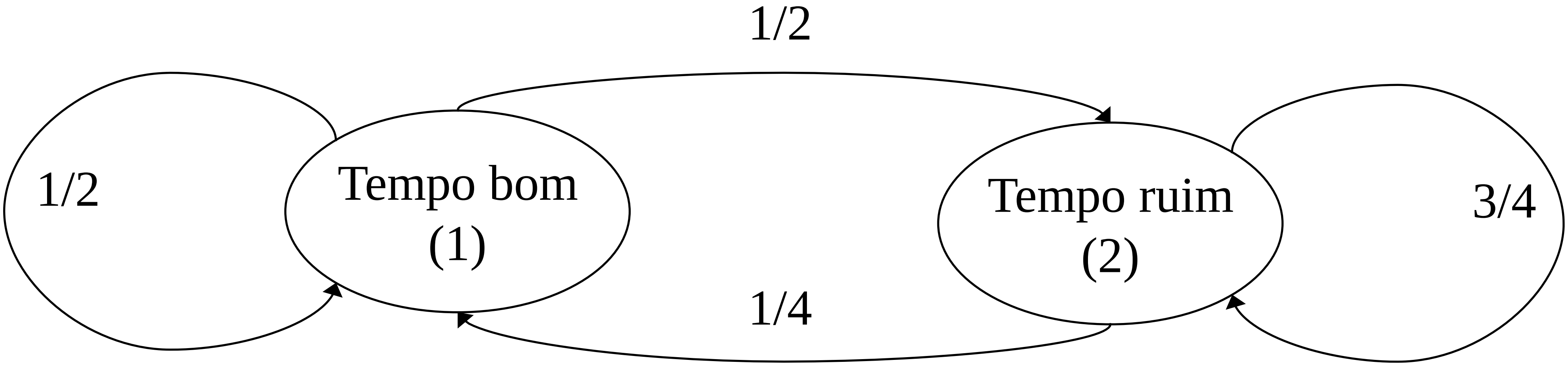
- Sob certas condições, as probabilidades de estado estabilizam-se após vários períodos de tempo em determinados valores, denominadas probabilidades limite (ou de regime permanente) da cadeia de Markov.
- As probabilidades serão denominadas P_1 e P_2 para o caso de dois estados, e satisfazem à equação:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}$$

Sabendo-se que $P_1 + P_2 = 1$

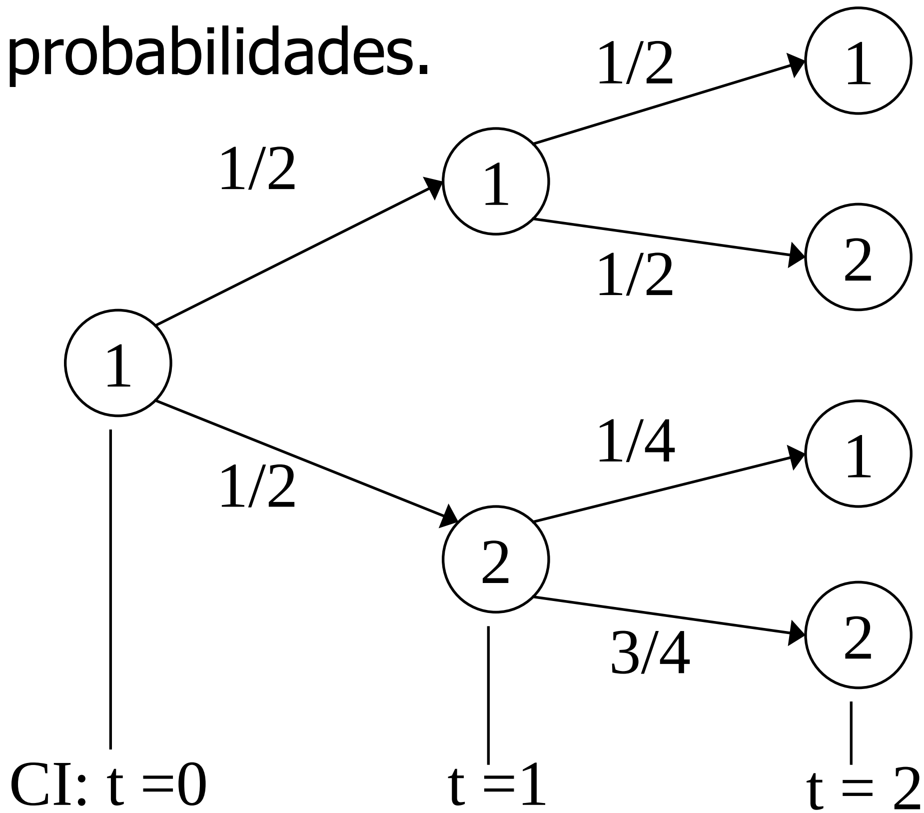
Exemplo 2

Processo com dois estados possíveis: tempo bom e tempo ruim



Probabilidades de transição

- Como estará o tempo após 2 transições (2 dias), supondo que a condição inicial seja tempo bom – estado 1: árvore de probabilidades.



t	P_1	P_2
0 (CI)	1	0
1	1/2	1/2
2	3/8	5/8

Exemplo 2 – Continuação

Matriz de transição: $$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

- Após 2 intervalos de tempo:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix}$$

- Após n intervalos de tempo: $$P^n = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}^n$$

Exemplo 2 – Probabilidades Limite

- Após 2 estados quais são as probabilidades do sistema estar nos estados 1 e 2?
  - Supondo $P_1^0 = 1$ e $P_2^0 = 0$:

$$\begin{bmatrix} P_1^{\,2} & P_2^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

  - Supondo $P_1^0 = 0$ e $P_2^0 = 1$:

$$\begin{bmatrix} P_1^{\,2} & P_2^{\,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/8 & 5/8 \\ 5/16 & 11/16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/16 & 11/16 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2 – Probabilidades Limite

$$[P_1 \quad P_2] \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = [P_1 \quad P_2]$$

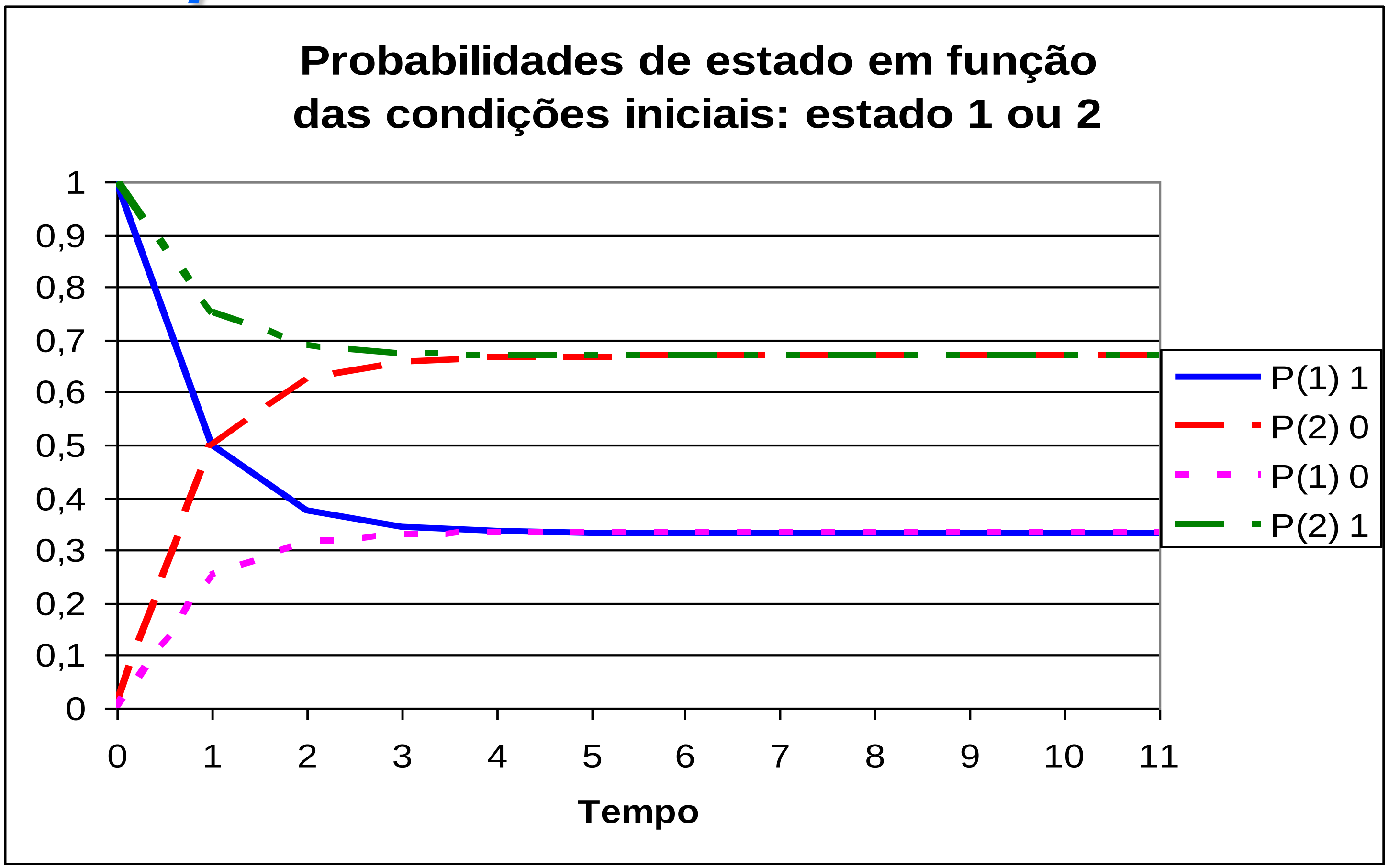
$$\left.\begin{array}{r} P_1 \times (1/2) + P_2 \times (1/4) = P_1 \\ P_1 \times (1/2) + P_2 \times (3/4) = P_2 \end{array}\right\} \text{Eqs. Linearmente Dependentes}$$

Mas, sabe-se que $P_1 + P_2 = 1$

$$\left.\begin{array}{c} (1/2) \times P_1 + (1/4) \times P_2 = P_1 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Probabilidades limite $\quad P_1 = \dfrac{(1/4)}{(3/4)} = 0{,}3333 \qquad P_2 = \dfrac{(1/2)}{(3/4)} = 0{,}6667$

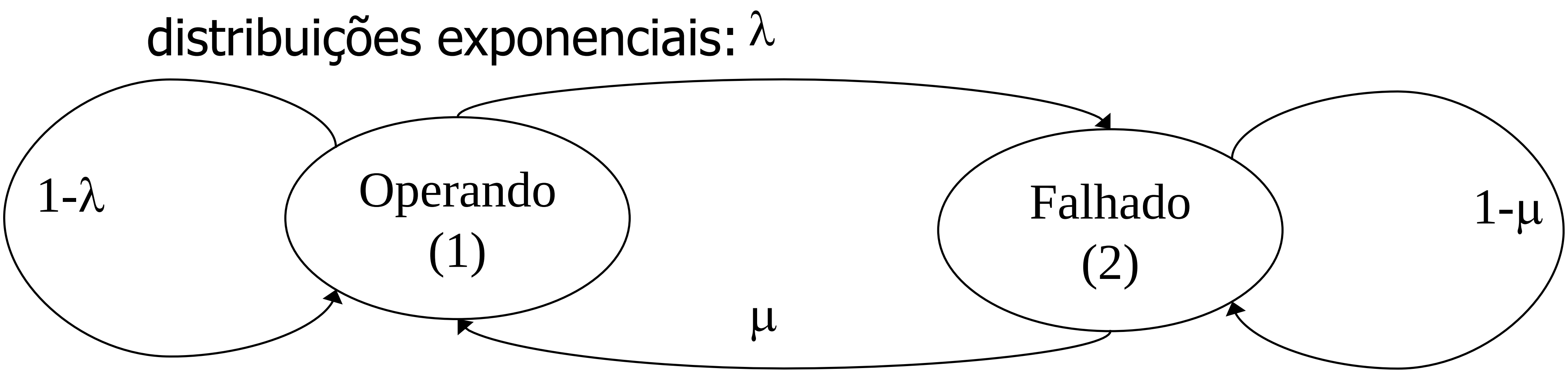
Exemplo 2 - Probabilidades Limite



A condição inicial modifica as probabilidades transitórias, mas não as probabilidades limite, que permanecem as mesmas.

Aplicação de Cadeias de Markov: um componente sujeito a renovação

- Processos a Parâmetros Contínuos e Estados Discretos, com restauração (possibilidade de reparo – taxa de reparo μ).
- Seja um sistema com um <u>único componente sujeito à renovação</u> com taxas de falha e reparo caracterizadas por distribuições exponenciais:



Probabilidades limite

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} (1-\lambda) & \lambda \\ \mu & (1-\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \qquad TM_1 = \frac{1}{\lambda} \qquad TM_2 = \frac{1}{\mu}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1(1-\lambda) + P_2\mu = P_1 \\ P_1\lambda + P_2(1-\mu) = P_2 \end{array} \right\} \text{Eqs. L.D.}$$

Mas, sabe-se que $P_1 + P_2 = 1$

$$\left. \begin{array}{c} -P_1\lambda + P_2\mu = 0 \\ P_1 + P_2 = 1 \end{array} \right\}$$

Lembrando: $\mathrm{TMPF} = \frac{1}{\lambda}$ $\qquad \mathrm{TMPR} = \frac{1}{\mu}$

$$P_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\mathrm{TMPF}}{\mathrm{TMPF} + \mathrm{TMPR}} \qquad P_2 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{\mathrm{TMPR}}{\mathrm{TMPF} + \mathrm{TMPR}}$$

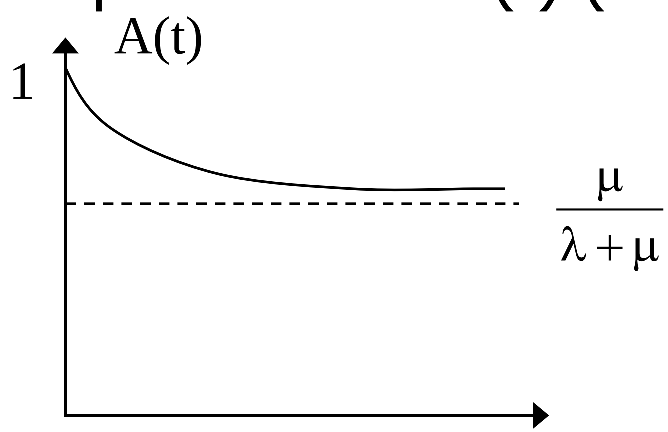
Exemplo 2 - Continuação

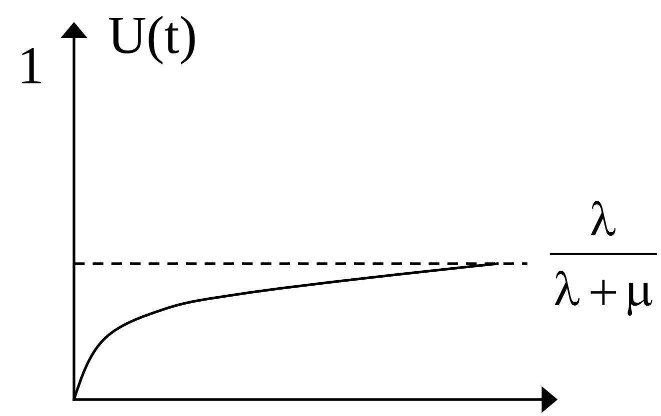
- Sabendo que "taxa de falha" igual a 1/2 (probabilidade de tempo mudar de bom para ruim) e que "taxa de reparo" igual a 1/4 (probabilidade de tempo mudar de ruim para bom, as probabilidades limites de cada estado (1- tempo bom e 2 – tempo ruim) serão:

$$P_1 = \frac{1/4}{1/2+1/4} = 1/3 \qquad P_2 = \frac{1/2}{1/2+1/4} = 2/3$$

Disponibilidade e Indisponibilidade

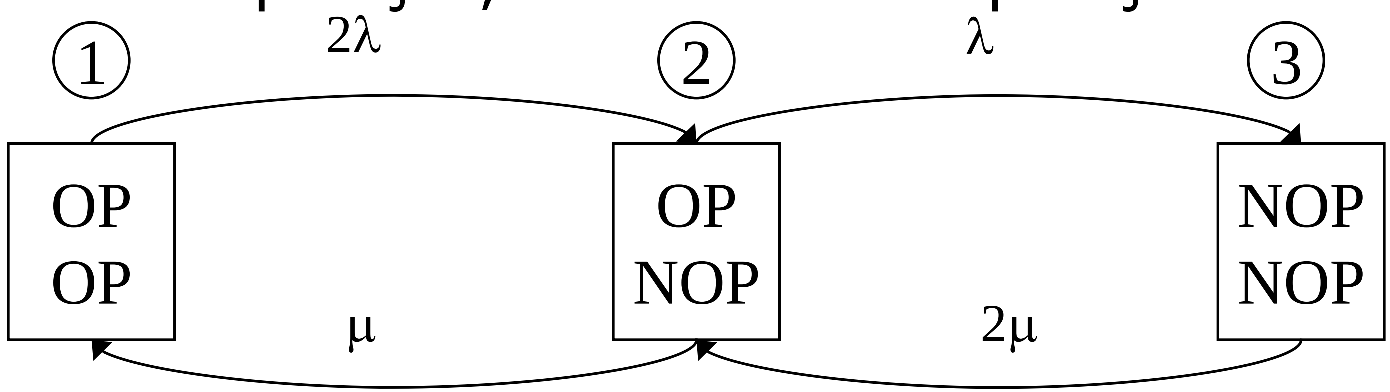
- Disponibilidade A(t) (Availability): probabilidade do elemento estar disponível em qualquer tempo, em um processo sujeito a reparo.
- Indisponibilidade U(t) (Unavailability): A(t) + U(t) = 1





Aplicação de Cadeias de Markov: 2 componentes sujeitos a renovação

- Seja um sistema com <u>dois componentes sujeitos à renovação</u> com taxas de falha e reparo caracterizadas por distribuições exponenciais:
- OP – em operação; NOP – Fora de operação.



Matriz de transição

- Cadeia de Markov: apenas transição entre estados "adjacentes".
- $P_{ij} = \lambda_{ij} \times t$

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-2\lambda & 2\lambda & 0 \\ \mu & 1-\lambda-\mu & \lambda \\ 0 & 2\mu & 1-2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} \qquad P_2 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \qquad P_3 = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}$$

Exemplo 3

- Suponha um gerador elétrico que tenha taxas de falha e de reparo constante:
  - λ = 0,001 falhas/hora; μ = 0,49 ocorrências/hora
- Calcule as probabilidades limite do gerador estar nos estados de operação e não operação.

$$P_{\text{operar}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}49}{0{,}001 + 0{,}49} = 0{,}99796$$

$$P_{\text{não operar}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} = \frac{0{,}001}{0{,}001 + 0{,}49} = 0{,}00204$$

Exemplo 4

- Sejam agora dois geradores elétricos idênticos, que tenham taxas de falha e de reparo constante:
  - λ = 0,001 falhas/hora; μ = 0,49 ocorrências/hora
- Calcule as probabilidades limite do sistema formado pelos dois geradores estar nos estados: ambos operando, apenas um operando, nenhum operando.

$$P_1 = \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{0{,}49^2}{(0{,}001+0{,}49)^2} = 0{,}9959$$

$$P_2 = \frac{2\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{2\times 0{,}001\times 0{,}49}{(0{,}001+0{,}49)^2} = 0{,}0041$$

$$P_3 = \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} = \frac{0{,}001^2}{(0{,}001+0{,}49)^2} \cong 0$$

Processos Estocásticos Normais ou Gaussianos

- X_t é normal/gaussiano se $X_t(t_1)$, ... , $X_t(t_n)$ forem normais conjuntas para qualquer n componentes de um vetor aleatório gaussiano X de dimensão n.
- Completamente caracterizados por média e autocorrelação (autocovariância).
- X_t gaussiano na entrada de um filtro linear Y_t na saída será também gaussiano => teorema de combinações lineares.
- X_t gaussiano estacionário no sentido amplo será também no estrito.

Processo de Wiener (movimento Browniano)

- Processo estocástico Xt será de Wiener se:
  - For um processo normal.
  - Tiver incrementos independentes estacionários.
  - $\mu_t = E[X_t] = 0$ para todos os $t \geq 0$.
- Autocorrelação: $R(t_1,t_2) = a \times \min(t_1, t_2)$.

Processo Ruído Branco Gaussiano

- Modelo para o ruído térmico em condutores: "contamina" sinal que chega a um receptor.
  - Ruído observado em um osciloscópio.
  - Ruído em uma TV sem canal sintonizado.
- Para um processo ruído branco gaussiano X_t com $t \in [-\infty, \infty]$
  - $E[X_t] = 0$
  - $C(t_1,t_2) = E[X_{t1}\ X_{t2}]$