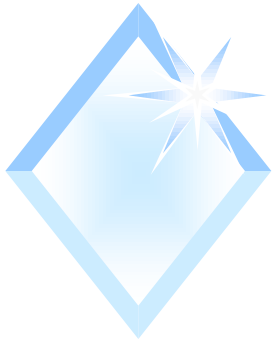


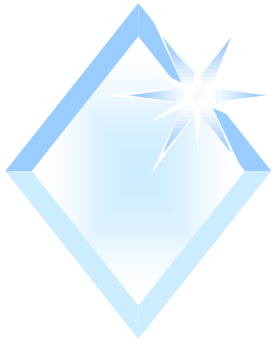
Processos de Markov

- ◆ Processos “sem memória”: probabilidade de X_t assumir um valor futuro depende apenas do estado atual (desconsidera estados passados).
 - ◆ $P(X_n=x_n \mid X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_{n-1}=x_{n-1}) = P(X_n=x_n \mid X_{n-1}=x_{n-1})$
para $n = 0, 1, 2, \dots$
- ◆ Seja X_t um processo de Markov, i e j estados, ζ e t tempos:
 - ◆ $p_{ij} = P[X_t(\zeta + t) = j \mid X_t(\zeta) = i] \quad \zeta \geq 0 \text{ e } t \geq 0$
- ◆ Se p_{ij} independe do tempo então o processo de Markov é dito **ESTACIONÁRIO** ou homogêneo.



Processos de Markov

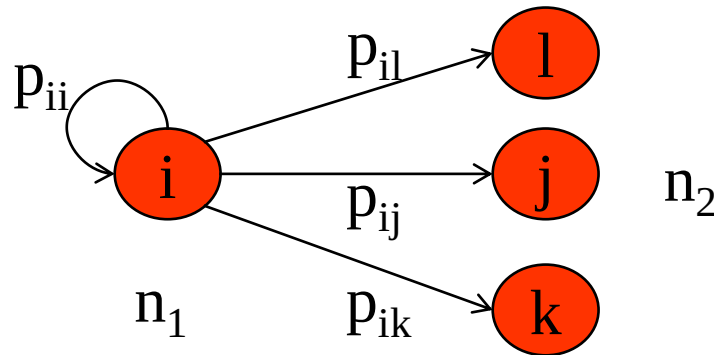
Parâmetros	Estados	
	Discretos	Contínuos
Discretos	Cadeias de Markov com tempo discreto	Processos de Markov com tempo discreto
Contínuos	Cadeias de Markov com tempo contínuo	Processos de Markov com tempo contínuo

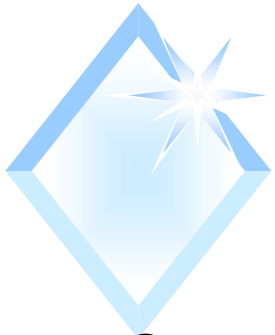


Cadeias de Markov a tempo discreto

- ◆ Estados discretos, parâmetros discretos.
- ◆ Probabilidade de estado $p_i[n] = P(X_t = a_i) \ i=1,2,\dots$
- ◆ Probabilidades de transição: $p_{ij}[n_1, n_2] = P(X_{tn2} = a_j \mid X_{tn1} = a_i)$

$$\sum_j p_{ij}[n_1, n_2] = 1 \quad \sum_i p_i[k] \times p_{ij}[k, n] = p_j[n]$$



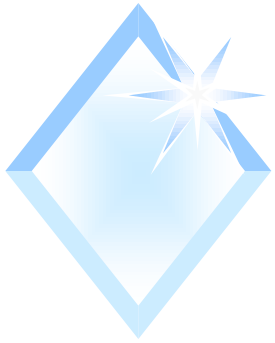


Matriz de transição

- ◆ O conjunto $P(X_{t_{n2}}|X_{t_{n1}})$ para $n = 1, 2, \dots$ constitui as probabilidades de transição de um passo.
- ◆ Matriz $N+1$ por $N+1$ de elementos p_{ij} que satisfaz:
 - ◆ $p_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad \sum p_{ij} = 1$ para $j=1, \dots, n$ e $\forall i$.

$$P = (p_{ij}) = \begin{Bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0N} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{N0} & p_{N1} & \dots & p_{NN} \end{Bmatrix}$$

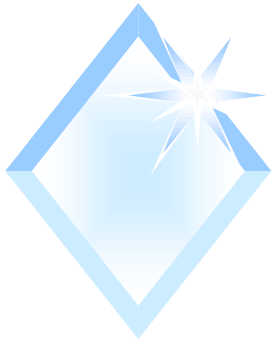
Se p_{ij} independentes
do tempo: processo
HOMOGÊNEO.



Cadeias de Markov a tempo contínuo

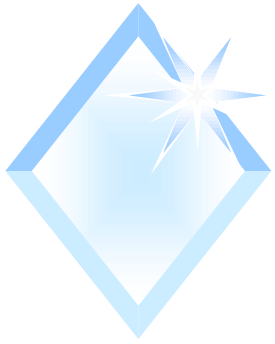
- ◆ Estados discretos, parâmetros contínuos.
- ◆ Probabilidade de estado $p_i[t] = P(X_t(t) = a_i) \ i=1,2,\dots$
- ◆ Probabilidades de transição: $p_{ij}[t_1,t_2] = P(X_t(t_2)= a_j | X_t(t_1)= a_i)$

$$\sum_j p_{ij}[t_1, t_2] = 1 \quad \sum_i p_i[t_1] \times p_{ij}[t_1, t_2] = p_j[t_2]$$

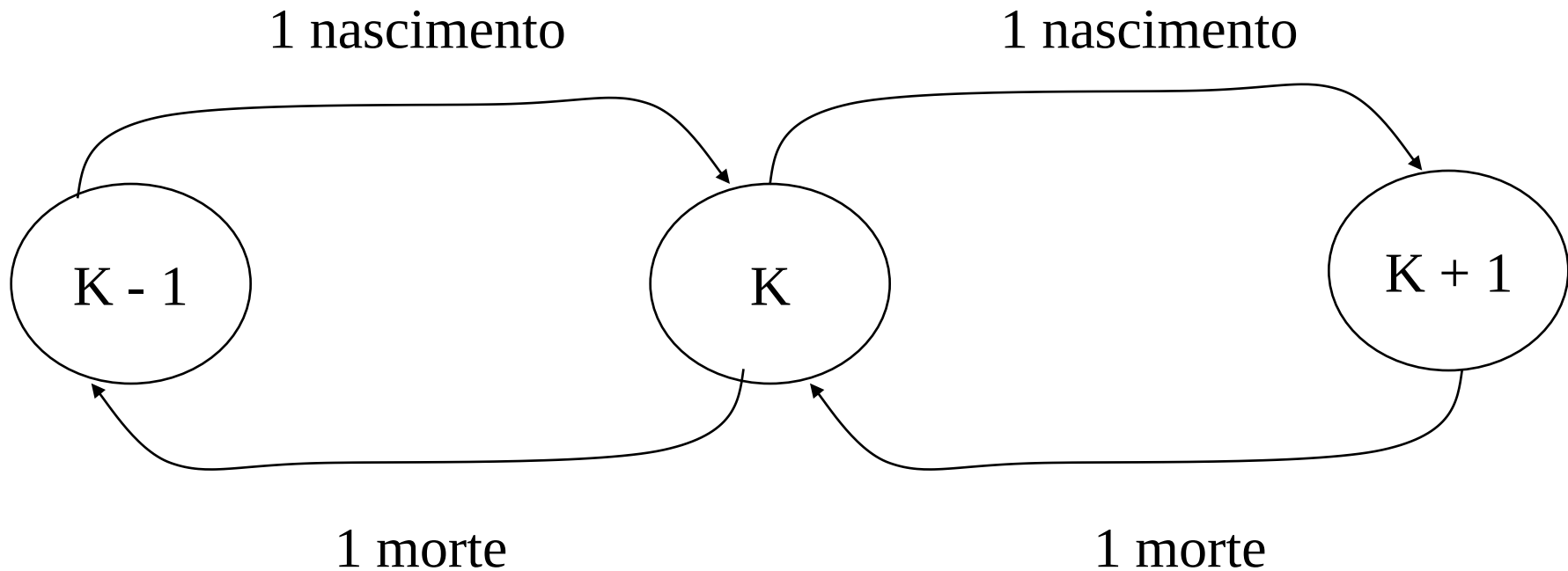


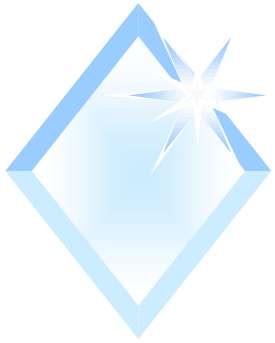
Processos de Nascimento e Morte

- ◆ Modelam as alterações em uma “população”: caso particular de cadeias de Markov a tempo contínuo.
- ◆ Estado do processo no instante t (X_t) representa o tamanho da população no instante t .
- ◆ Filas e sistemas de telecomunicações.
- ◆ Assume-se que “nascimentos” e/ou “mortes” múltiplos ocorrem ao mesmo tempo com probabilidade zero.
- ◆ As transições ocorrem apenas entre estados vizinhos.



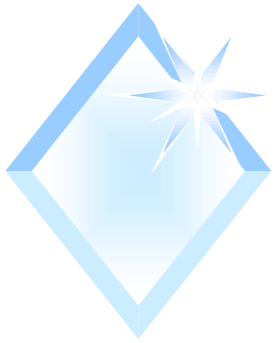
Processos de Nascimento e Morte





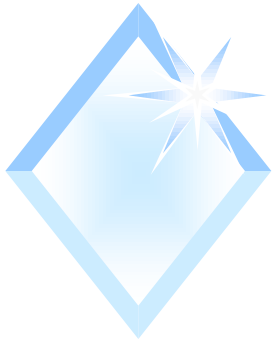
Processos de Nascimento e Morte

- ◆ Taxas de nascimento λ_i para $i = 0, \dots, \infty$
- ◆ Taxas de morte μ_i para $i = 0, \dots, \infty$
- ◆ Processo de nascimento puro: $\mu_i = 0$ para $i \geq 0$
 - ◆ Divisão de bactérias
- ◆ Processo de morte puro: $\lambda_i = 0$ para $i \geq 0$



Processo de Poisson

- ◆ Processo de nascimento puro pois a taxa de nascimento é constante: λ .
- ◆ $P_k(t) = [(\lambda \times t)^k \times e^{-\lambda \times t}] / k!$ Para $k \geq 0$ e $t \geq 0$.
 - ◆ Probabilidade de haver k nascimentos no intervalo $(0, t)$.
 - ◆ Número médio de nascimentos no intervalo $(0, t) = \lambda \times t$.
 - ◆ Processo de Parâmetros Contínuos e Estados Discretos.



Processo de Poisson

- ◆ Evento: “nenhuma chegada nos primeiros t minutos”

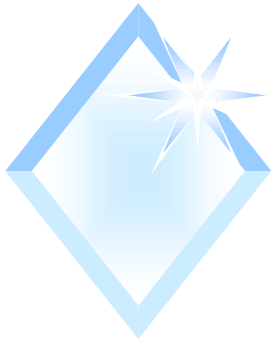
$$P_0(t) = \frac{(\lambda \times t)^0 \times e^{-\lambda \times t}}{0!} = e^{-\lambda \times t}$$

- ◆ Equivalente à “primeira chegada após o tempo t ”.
- ◆ Seja t uma variável aleatória que represente o tempo de 0 até a 1ª chegada:

- ◆ $P(T > t) = e^{-\lambda \times t}$ $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda \times t} = F(T)$

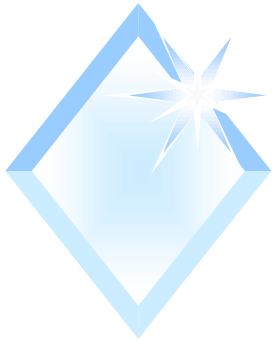
- ◆ $f(T) = \partial F(T) / \partial t = \lambda \times e^{-\lambda \times t}$

- ◆ T tem distribuição exponencial: $E(T) = 1/\lambda$ $V(T) = 1/\lambda^2$



Modelagem de falhas

- ◆ Confiabilidade de sistemas
 - ◆ Necessário modelar o comportamento do sistema, identificando os seus estados.
 - ◆ Importância do estado “fora de operação”, que é causado por uma **falha**.
 - ◆ Obter alguma medida da frequência com que o sistema falha:
 - ◆ Taxa de falha (transição, risco – Hazard Rate)
 - ◆ Considerar a possibilidade de **reparo**.



Taxa de falha em um momento t

$$Z(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\text{Prob. de falha entre } t \text{ e } t + 1}{\text{Prob. de sobrevivência de } 0 \text{ a } t}$$

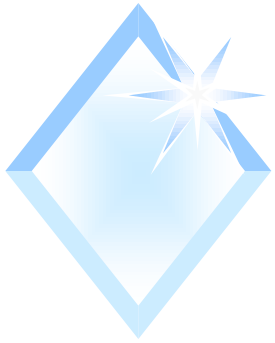
$Z(t)$: taxa de falha no momento t

$f(t)$: função densidade de probabilidades de falha

$F(t)$: função distribuição acumulada de falha.

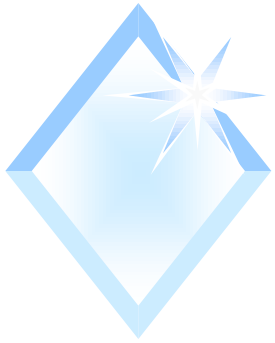
$R(t)$: confiabilidade do sistema

Raciocínio análogo para a taxa de reparo $\mu(t)$.



Dados para os modelos de falha

- ◆ Testes de tempo de vida.
- ◆ Dados operacionais do sistema (campo).
- ◆ Em $t = 0$, N componentes são colocados em operação, e no tempo t existem apenas $n(t)$ sobreviventes
- ◆ Deduzir as expressões da função densidade de falha e da taxa de falha propriamente dita.

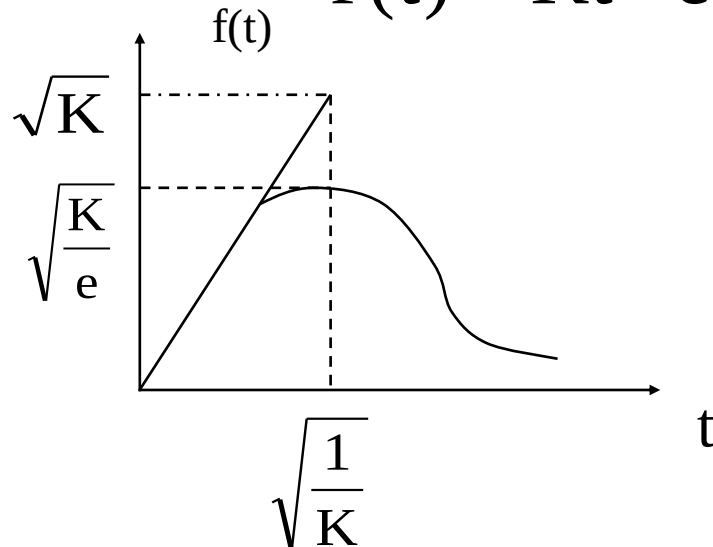


Principais modelos de falha

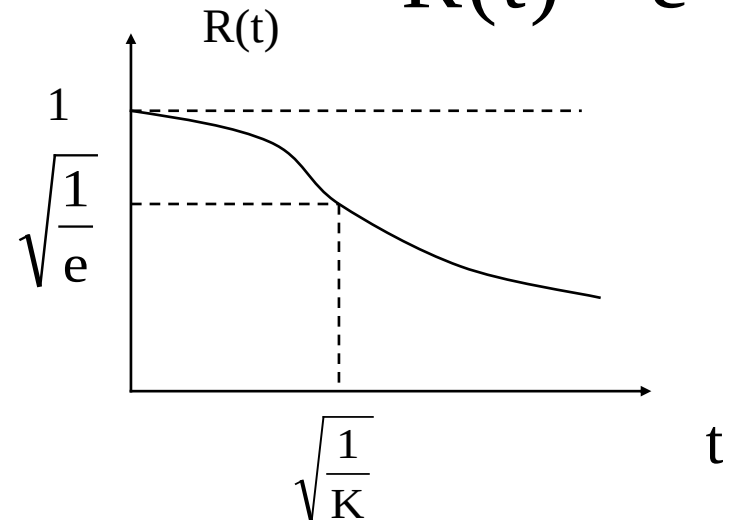
- ◆ 1) Taxa de falha crescente: útil no período de envelhecimento dos componentes.

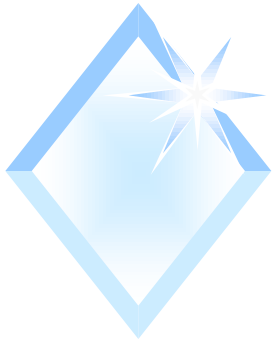
- ◆ $Z(t) = Kt$

$$f(t) = Kt \times e^{\left(-\frac{1}{2}Kt^2\right)}$$



$$R(t) = e^{\left(-\frac{1}{2}Kt^2\right)}$$

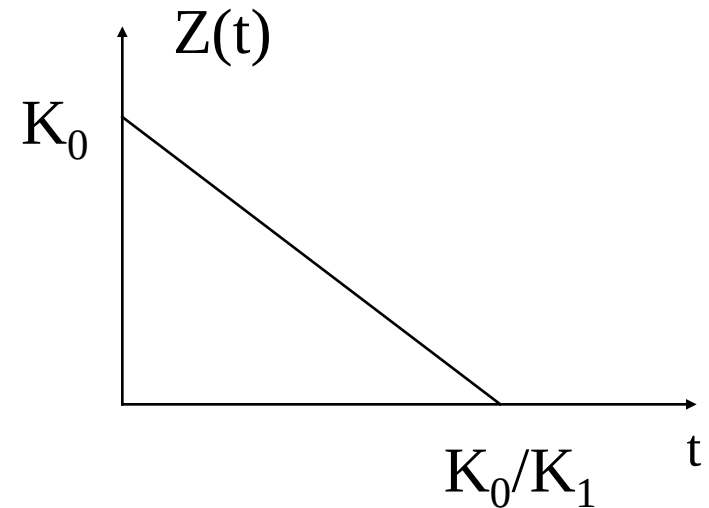


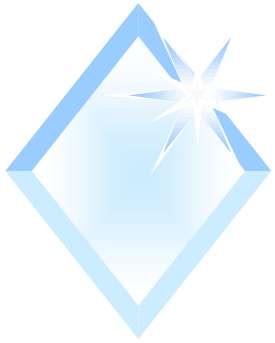


Principais modelos de falha

- ◆ 2) Taxa de falha linearmente decrescente: útil quando as falhas vão diminuindo ao longo do tempo (fase inicial de vida do equipamento).

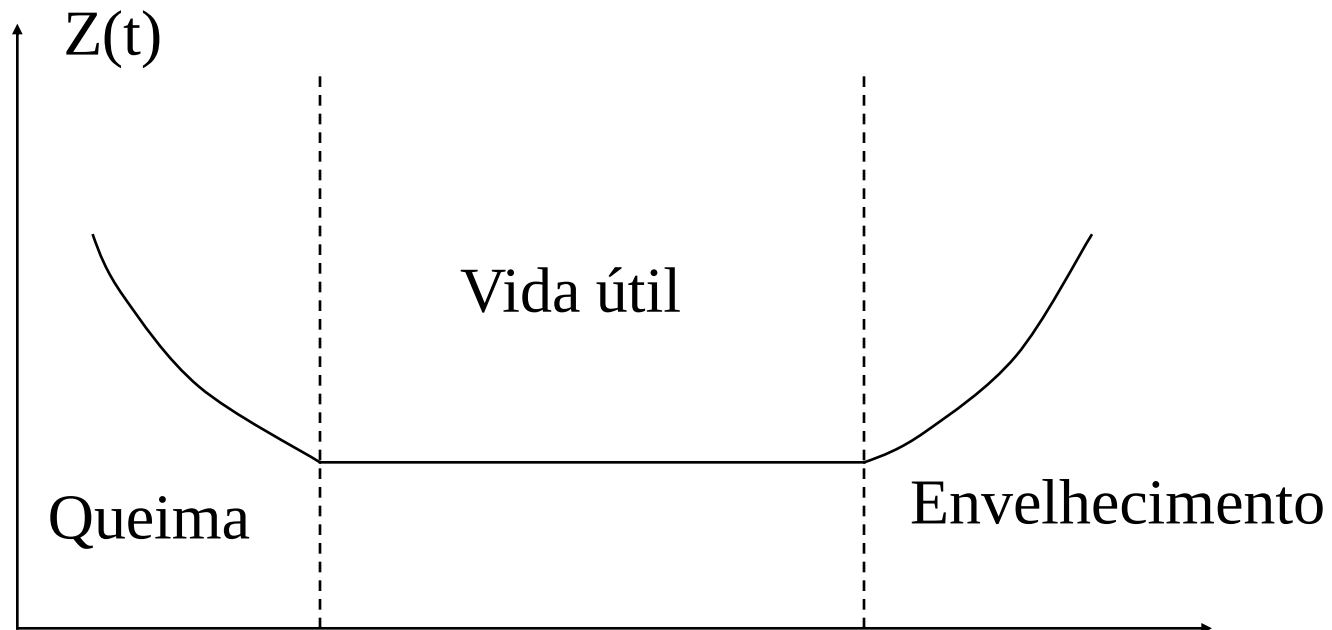
$$Z(t) = \begin{cases} K_0 - K_1 t & 0 < t \leq K_0 / K_1 \\ 0 & K_0 / K_1 < t \leq t_0 \\ K(t - t_0) & t_0 < t < +\infty \end{cases}$$

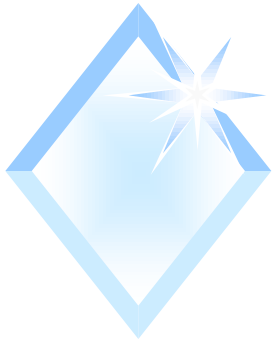




Principais modelos de falha

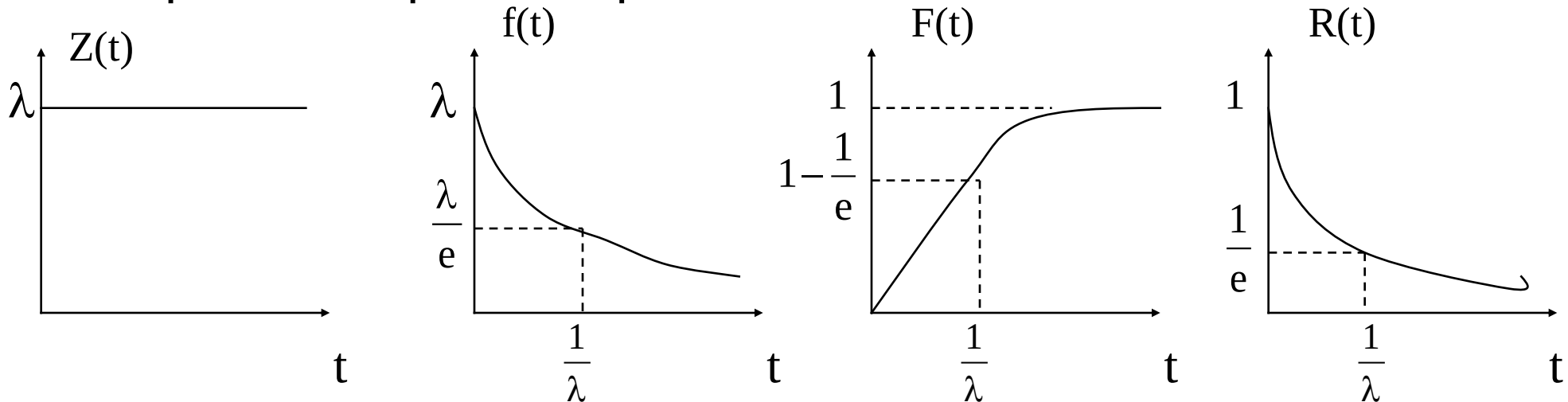
- ◆ 3) Curva usual para risco de falha: curva da banheira

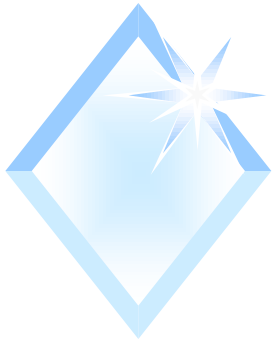




Principais modelos de falha

- ◆ 4) Taxa de falha constante: $Z(t) = \lambda$.
- ◆ $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $R(t) = e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$
- ◆ Distribuição “independe do passado”: vida restante não depende de quanto tempo o componente está em funcionamento



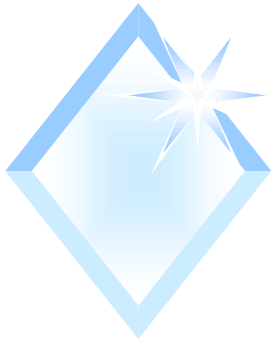


Tempo Médio Para Falha

- ◆ Caracterização do modelo de falha por um único parâmetro.
- ◆ Do teste de vida feito em uma população de N elementos com tempos de falhas $t_1, t_2, \dots, t_n$:
$$TM_{PF} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n t_i$$
- ◆ Usando um modelo de risco:

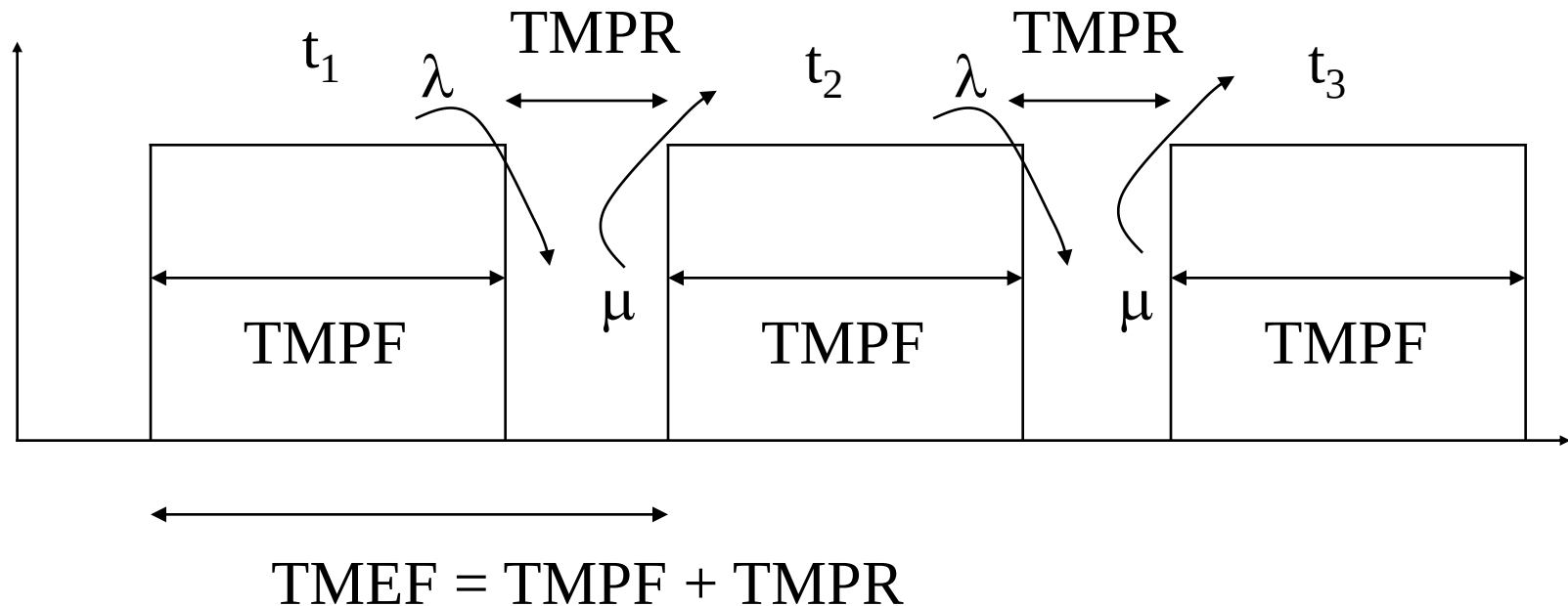
$$TM_{PF} = E(t) = \int_0^{\infty} t f(t) dt \quad TM_{PF} = E(t) = \left[-tR(t) \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} R(t) dt$$

- ◆ Para a exponencial: $R(0) = 1, R(\infty) = 0$.
$$TM_{PF} = \int_0^{\infty} R(t) dt$$



Tempo Médio Entre Falha

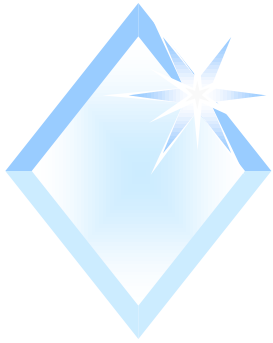
- ◆ Somente tem sentido se houver renovação: reparo ou troca do componente falhado.



λ = taxa de falha

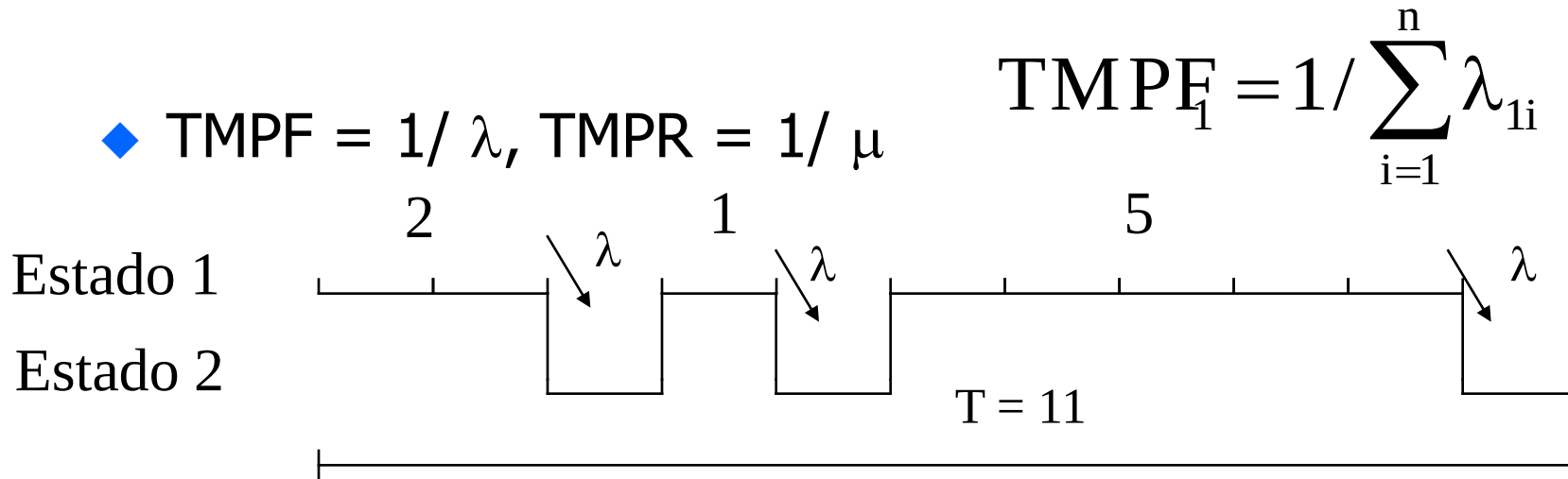
μ = taxa de reparo

Exponencial: $\text{TMPF} = 1/\lambda$



Exemplo 1

- ◆ Seja z uma taxa de transição qualquer: se falha = λ , se reparo = μ , se é uma transição do estado 1 para o 2 = λ_{12} .



$$\lambda_{12} = \frac{\text{no. falhas}}{\text{tempo operação}} = \frac{3}{8}$$

$$P_1 = 8/11$$