PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Definições, Principais Tipos, Aplicações em Confiabilidade de Sistemas e Sinais

CLARKE, A. B., DISNEY, R. L. Probabilidade e Processos Estocásticos, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, 1979.

CAMARGO, C. C. de, Confiabilidade Aplicada à Sistemas de Potência, Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora, Santa Catarina: FEESC, 1981.

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

KOVÁCS, Z.L. Teoria da Probabilidade e Processos Estocásticos. São Paulo: Edição Acadêmica, 1996.

JONES, P.W., SMITH, P. Stochastic Processes An Introduction. 2nd edition, Boca Raton: CRC Press, 2009.

KAY, S.M. Intuitive Probability and Random Processes using MATLAB, Springer, 2006.

PROCESSO ESTOCÁSTICO

- "Fenômeno que varia em algum grau, de forma imprevisível, à medida que o tempo passa".
  - Variação do tráfego em um cruzamento;
  - Variação diária no tamanho do estoque de uma empresa;
  - Variação minuto a minuto do índice IBOVESPA;
  - Variação no estado de um sistema de potência;
  - Variação no número de chamadas feitas a uma central telefônica.

Imprevisibilidade?

- A observação de uma sequência de tempo inteira do processo, em ocasiões diferentes, sob condições presumivelmente diferentes:
  - Sequências resultantes **diferentes**.
- Comportamento de um sistema para uma sequência ou intervalo de tempo inteiro:
  - O resultado será uma função (ou sequência de valores) e não apenas um número.

Definição

- "Realiza-se um experimento E com resultados formando um espaço S com subconjuntos denominados eventos, aos quais se associam probabilidades. Se a cada resultado s se puder associar uma função temporal real ou complexa X_t, então, à família destas funções se dá o nome de processo estocástico".

Parâmetros do Processo

- Para analisar o processo estocástico é preciso especificar o período de tempo T envolvido: **quando** ele será observado.
- Se T é contínuo, $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$:
  - Trata-se de um Processo Estocástico de Parâmetros Contínuos: Poisson.
- Se T é discreto, $T = \{0, 1, 2, ...\}$:
  - Trata-se de um Processo Estocástico de Parâmetros Discretos: Séries Temporais em geral.

Realizações do Processo

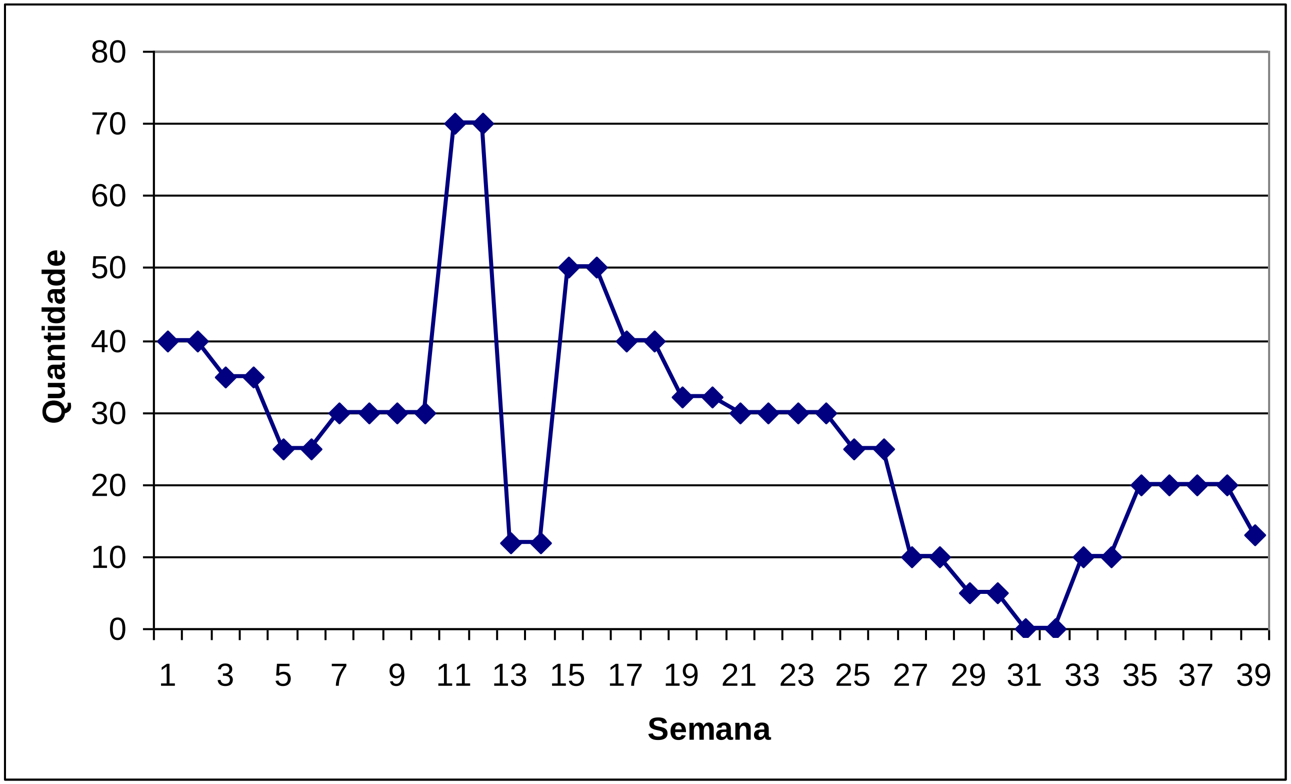
- A cada ponto t do conjunto T observa-se uma medida ou variável aleatória X_t.
- Se o ponto amostral for indicado por s:
  - $X_t\,(s)$ para $t \in T$.
  - Tal função de t é chamada de processo estocástico ou aleatório.
  - Uma única função $X_t(s_1)$ que corresponde a um único ponto amostral s_1 é chamada de **função amostra** ou **realização** do processo estocástico.

Estados do Processo

- O conjunto de valores que X_t pode assumir é chamada de **Espaço de Estados**, e os valores específicos de X_t em dado momento são os Estados do Processo.
  - Se X_t representa alguma contagem: Espaço de Estados poderia ser uma seqüência finita ou infinita de inteiros.
    - Processo de Estado Discreto ou Cadeia Aleatória.
  - Se X_t representa uma medida: Espaço de Estados poderia ser um intervalo de números reais.
    - Processo de Estado Contínuo.

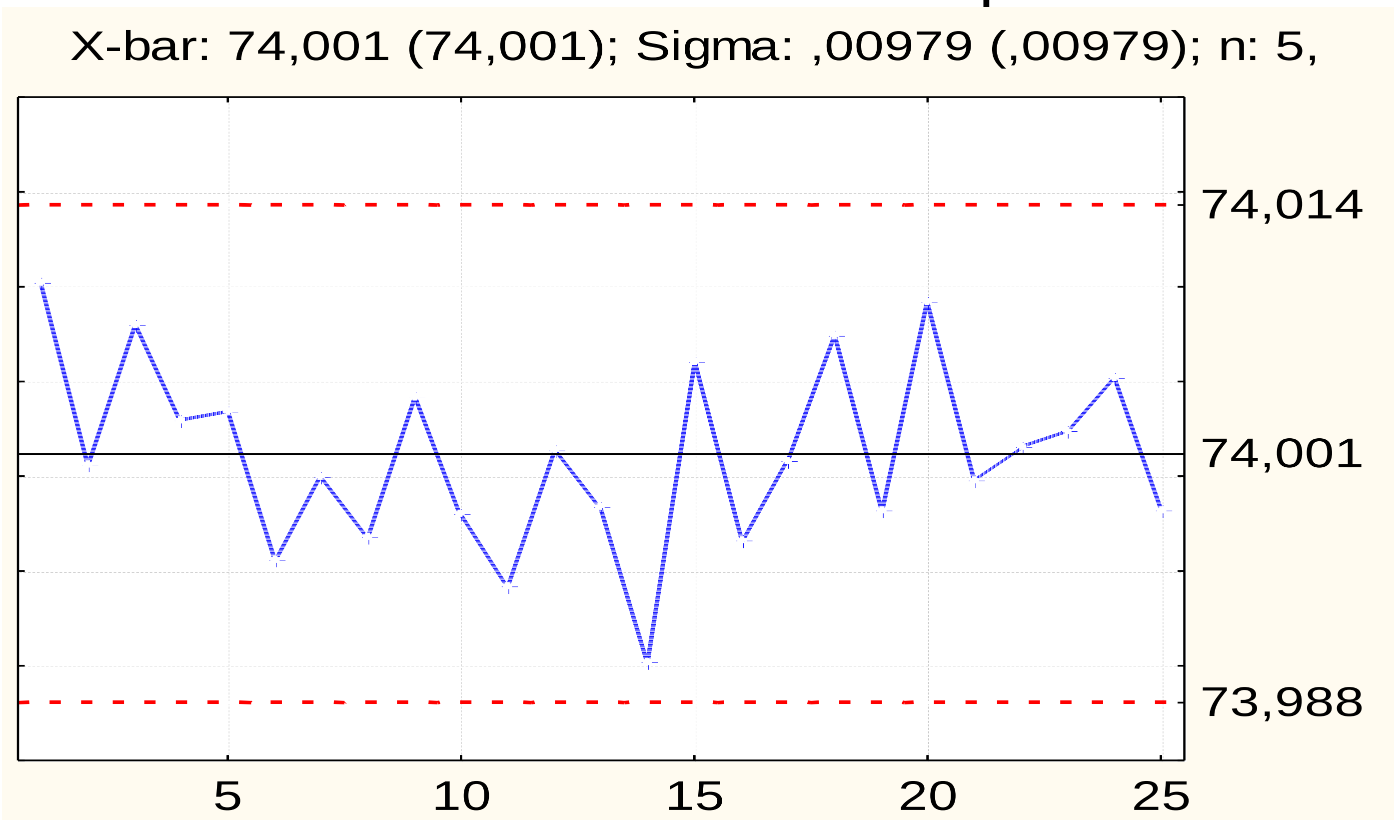
Parâmetros x Estados

- Processo de Parâmetros Discretos e Estados Discretos
  - Estoque de peças em uma loja ao fim da semana.



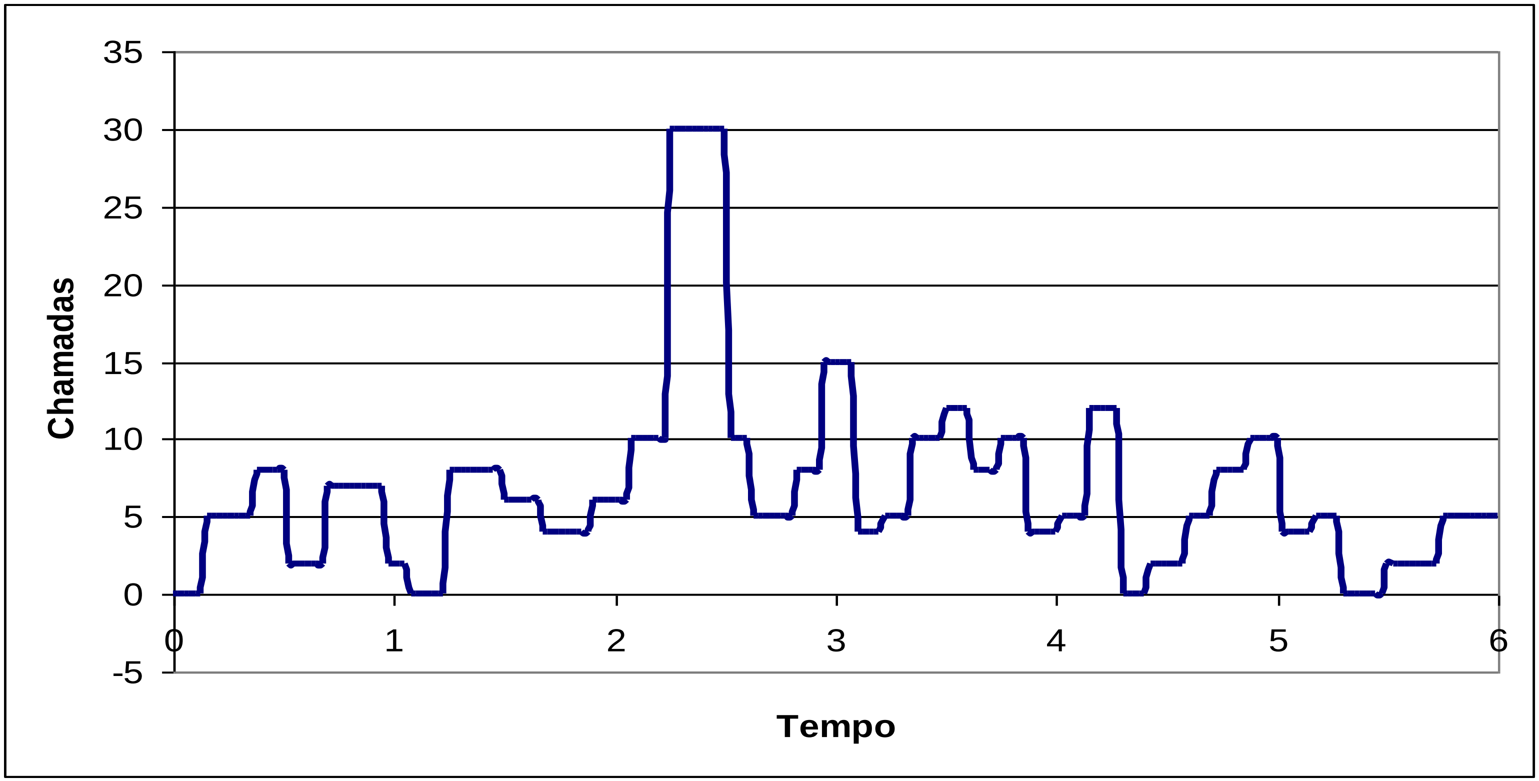
Parâmetros x Estados

- Processo de Parâmetros Discretos e Estados Contínuos
  - Médias amostrais dos diâmetros de pistões.



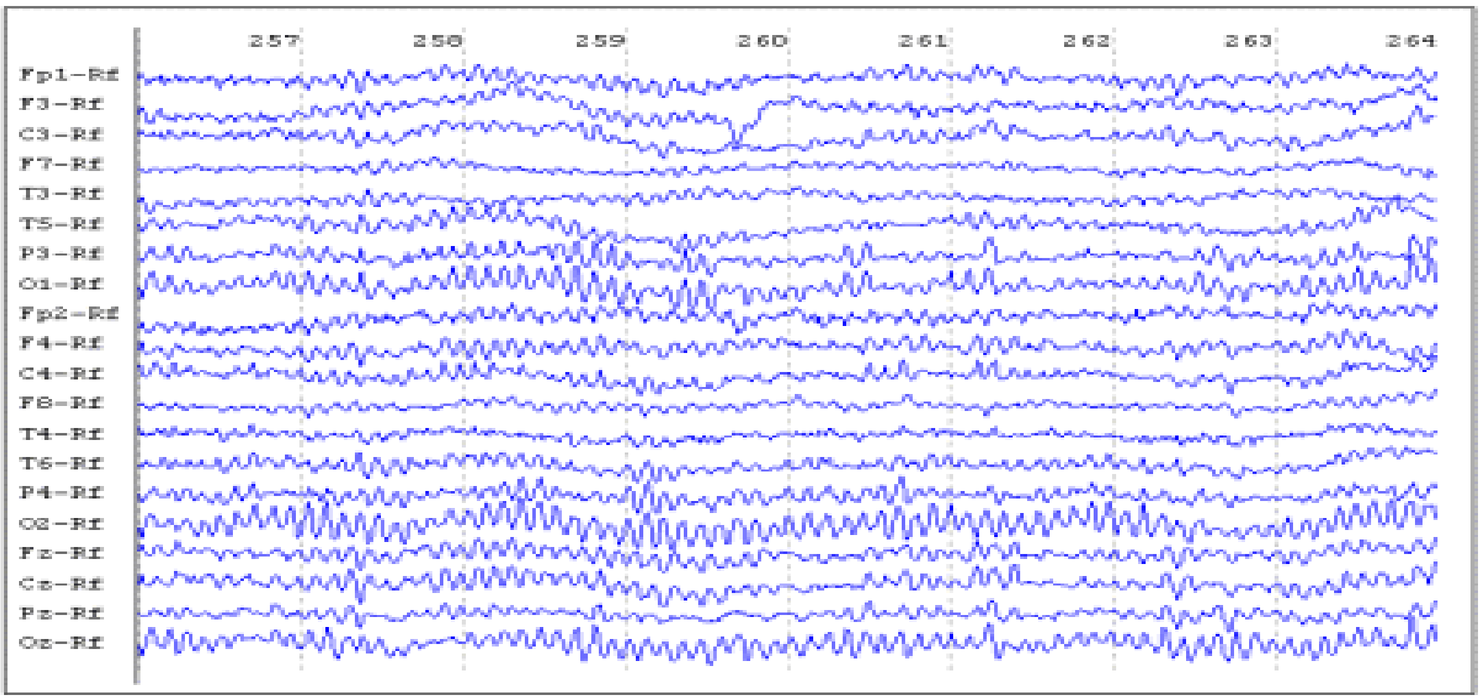
Parâmetros x Estados

- Processo de Parâmetros Contínuos e Estados Discretos
  - No. de chamadas recebidas por um call-center em 6 horas



Parâmetros x Estados

- Processo de Parâmetros Contínuos e Estados Contínuos
  - Eletroencefalograma



Caracterização de um Processo Estocástico

- Completa: são conhecidas todas as funções densidade de probabilidade conjuntas de todas as variáveis aleatórias que podem ser definidas, observando-se o processo em qualquer instante $t \in T$.
- Parcial: são conhecidas apenas as suas funções média e autocorrelação (ou autocovariância).

Caracterização de um Processo Estocástico

- De primeira ordem:
  - $F(x,t) = P[X_t(s) \leq x]$ $f(x,t) = \partial F/\partial x$ conhecidas para $\forall\, t \in T$.
- De segunda ordem:
  - $F(x_1,x_2;t_1,t_2) = P[X_{t1}(s) \leq x_1, X_{t2}(s) \leq x_2]$ conhecidas para $\forall\, t_1$ e $t_2 \in T$.
- De ordem m:
  - Conhecida a função densidade de probabilidade conjunta das m variáveis aleatórias $X_{t1}(s)$ ... $X_{tm}(s)$ para qualquer conjunto de valores t_i, $i = 1, \ldots, m$

Média, autocorrelação e autocovariância

Média

$$\mu(t) = E[X_t] = \sum_x x \times f(x;t)$$

$$\mu(t) = E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x;t)dx$$

Autocorrelação

$$R(t_1, t_2) = E[X_{t_1} X_{t_2}] = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2)$$

$$R(t_1, t_2) = E[X_{t_1} X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Média, autocorrelação e autocovariância

Autocovariância

$$C(t_1, t_2) = E\{[X_{t_1} - \mu(t_1)] \times [X_{t_2} - \mu(t_2)]\} = R(t_1, t_2) - \mu(t_1) \times \mu(t_2)$$

Processos Estocásticos Estacionários

- Sentido estrito: para qualquer ordem m a função densidade de probabilidade conjunta de ordem m **NÃO VARIA** com o tempo.
  - $f(x_1,x_2,\ldots,x_m;t_1,t_2,\ldots,t_m) = f(x_1,x_2,\ldots,x_m;t_{1+\Delta},t_{2+\Delta},\ldots,t_{m+\Delta})$
- Sentido amplo
  - $E[X_t] = \mu$ (constante)
  - $E[X_t(t+\delta)X_t] = R_{X_tX_t}(\delta)$
- Estacionário em incrementos: se $Y_t = X_t(t+\delta) - X_t(t)$ for estacionário.

Ergodicidade

- Processo estocástico estacionário é ergódico se todas as suas estatísticas podem ser determinadas a partir de qualquer função $X_t(t,s)$ do processo, ou seja, através de médias temporais.
- Da média

$$\mu_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_t(t)dt$$

- Da variância

$$\sigma^2{}_T = \frac{1}{T}\int_{0}^{2T}\left(1-\frac{\delta}{2T}\right)\left[R(\delta)-\mu_T\right]d\delta$$

- Quando T -> ∞ $\mu_T = \mu$ $\sigma^2{}_{\mu T}$ -> 0