Estatística para Cursos de Engenharia e Informática

Pedro Alberto Barbetta / Marcelo Menezes Reis / Antonio Cezar Bornia
São Paulo: Atlas, 2004

Cap. 4 - Probabilidade

APOIO:
Fundação de Ciência e Tecnologia de Santa Catarina (FUNCITEC)
Departamento de Informática e Estatística (INE/CTC/UFSC)

Incerteza e Probabilidade

- Tomar decisões:
  - Curso mais provável de ação:
    - Se desejamos passear de barco e não sabemos nadar, devemos usar um salva-vidas.
    - Se não confiamos na continuidade do fornecimento de energia elétrica, devemos ter lanternas (e pilhas) ou velas (e fósforos) em casa.
  - Incerteza:
    - Por mais medo que se tenha, ou por mais revolto que seja o mar, pode não acontecer nada no seu passeio de barco.
    - Por pior que seja a concessionária de energia elétrica pode não faltar energia...

Incerteza e Probabilidade

- Questão chave: como QUANTIFICAR a incerteza para auxiliar a tomada de decisões.

- Há vários métodos: um deles é a Probabilidade

Modelos probabilísticos

- Construção de modelos de probabilidade para entender melhor os fenômenos aleatórios

Incerteza!

Experimentos aleatórios

- Experimentos aleatórios são aqueles nos quais:
  - ANTES do experimento ocorrer não se pode definir qual será o seu resultado.
  - Quando é realizado um grande número de vezes, ele apresenta uma regularidade, que possibilita construir um modelo para prever seus resultados.
- Exemplos
  - Consumo de energia elétrica em uma cidade.
  - Resultados de jogos que envolvam sorteio (não viciados).
  - Número de pessoas que chegarão em um banco nas próximas 2 horas.

Modelos probabilísticos

Definição do experimento

↓

Definição dos resultados possíveis do experimento

↓

Definição de uma regra que obtenha a probabilidade de cada resultado ocorrer.

Espaço amostral

- O conjunto de *todos* os possíveis resultados do experimento é chamado de **espaço amostral** e é denotado pela letra grega Ω.

- Um espaço amostral é dito **discreto** quando ele for finito ou infinito enumerável; é dito **contínuo** quando for infinito, formado por intervalos de números reais.

Espaço Amostral

- Consumo de energia elétrica em uma cidade.
  Ω: {Energia/Potência $\geq$ 0 (MWh ou MW)}
- Resultados de jogos que envolvam sorteio (não viciados). Ω: {possíveis resultados}
- Número de pessoas que chegarão em um banco nas próximas 2 horas. Ω: {0, 1, 2, ...}

Eventos

- Chamamos de **evento** a qualquer subconjunto do espaço amostral:

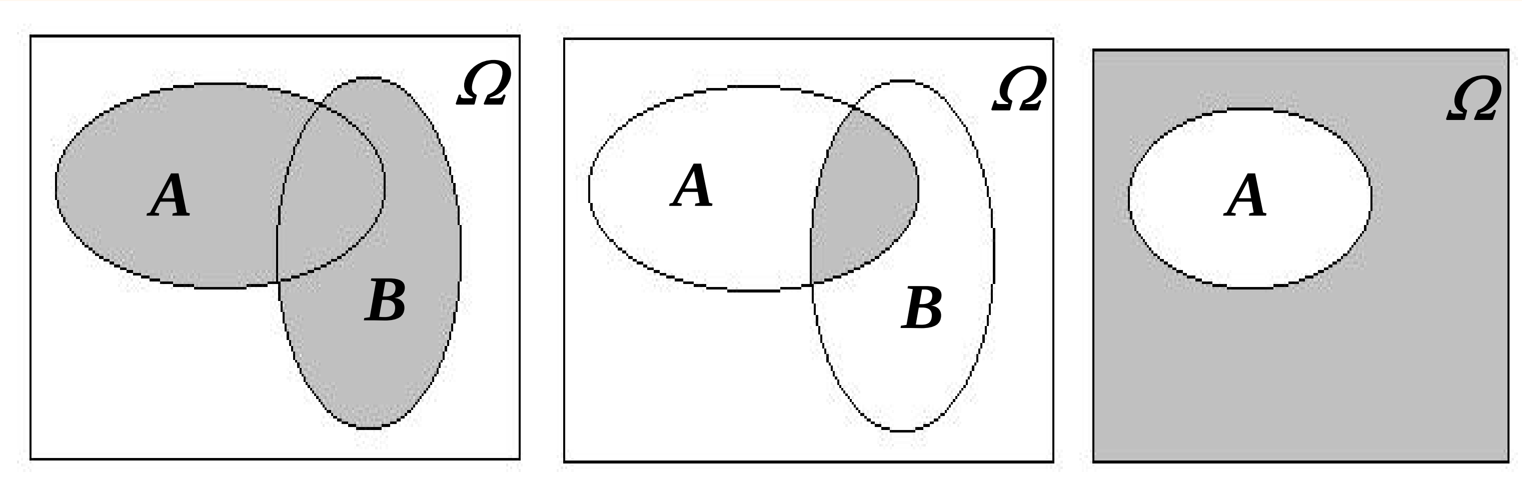
- A é um evento $\Leftrightarrow A \subseteq \Omega$

Operações entre eventos

(a) União: $A \cup B$

(b) interseção: $A \cap B$

(c) complementar: $\overline{A}$



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

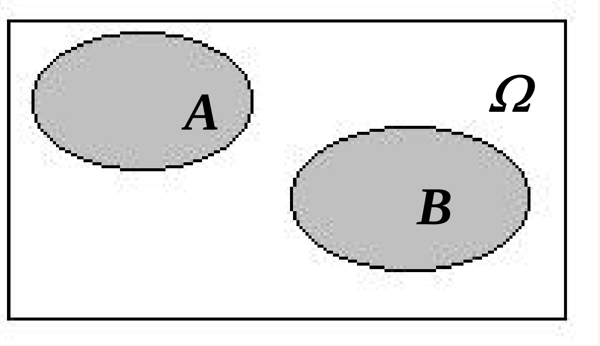
Operações entre eventos

Operação		Conjunto	Evento
a) União $A \cup B$		reúne os elementos de ambos os conjuntos	ocorre quando ocorrer pelo menos um deles (*A*, *B* ou ambos)
b) Interseção $A \cap B$		formado somente pelos elementos que estão em *A* e *B*	ocorre quando ocorrer ambos os eventos (*A* e *B*)
c) Complementar $\overline{A}$		formado pelos elementos que não estão em *A*	ocorre quando não ocorrer o evento *A* (*não A*)

Eventos mutuamente exclusivos

- Eventos são ditos **mutuamente exclusivos** se e só se eles não puderem ocorrer simultaneamente.

- *A* e *B* são *mutuamente exclusivos* $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Exemplo de operações com eventos

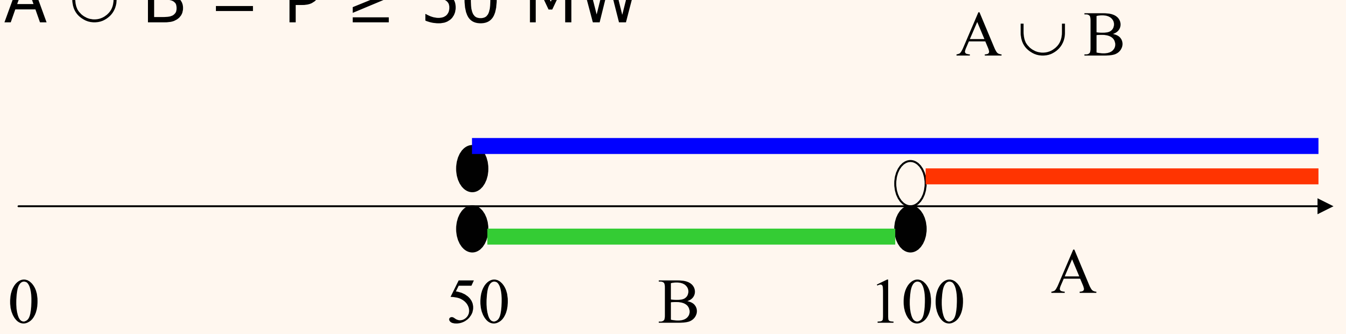
- Experimento aleatório: potência elétrica P (em MW) demandada por uma cidade em um momento.
- Operações com os eventos:
  - A = Mais de 100 MW ($P > 100$ MW).
  - B = Entre 50 e 100 MW ($50 \leq P \leq 100$ MW).
  - C = Mais de 80 MW ($P > 80$ MW).

$$G = \overline{B \cap C}$$

- $D = A \cup B \quad E = A \cap B \quad F = B \cap C$
- Representar geometricamente.

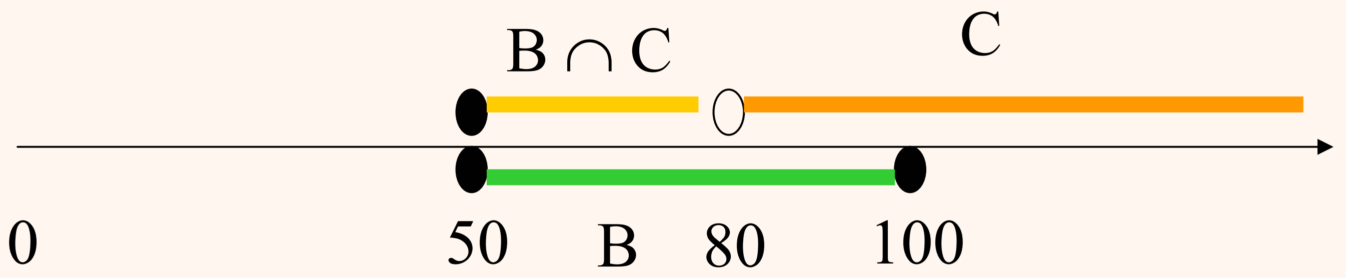
Exemplo de operações entre eventos

$D = A \cup B = P \geq 50$ MW



$E = A \cap B = \varnothing$, A e B são mutuamente exclusivos.

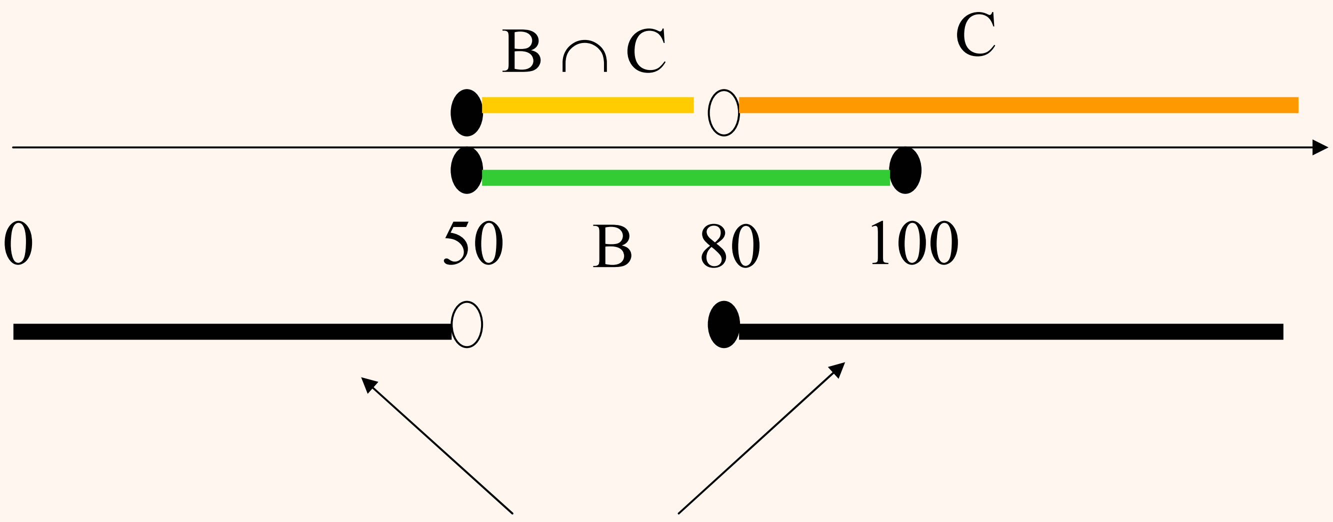
$F = B \cap C = 50 \leq P < 80$ MW



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Exemplo de operações entre eventos

$G = \overline{B \cap C} \;\; = 50 < P \geq 80$ MW



$G = \overline{B \cap C}$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos equiprováveis

Definição clássica: $$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

- sendo:
  - n resultados *igualmente prováveis*,
  - n_A destes resultados pertencem a um certo evento A

Probabilidade de eventos

- Espaços amostrais discretos

- Se $A \subseteq \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$, então:

$$P(A) = \sum_{i:\varpi_i \in A} P(\omega_i)$$

Probabilidade de eventos

- Alocação de probabilidades em função de observações passadas:

$$f(A) = \frac{n_A}{n}$$ Freqüência relativa

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

Axiomas da Probabilidade

- Seja um experimento aleatório com um espaço amostral Ω associado a ele, e seja E_i (i= 1, 2, ...n) um evento genérico.
- A probabilidade de ocorrência de E_i será um número real tal que:
  - $0 \leq P(E_i) \leq 1$
  - $P(\Omega) = 1$
  - Se E_1, E_2, ..., E_n são eventos mutuamente exclusivos, então $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = \Sigma\, P(E_i)$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

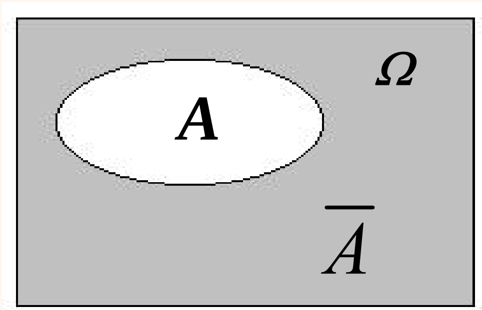
Propriedades

- $P(\varnothing) = 0$

- $P(\Omega) = 1$

- Probabilidade do evento complementar

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

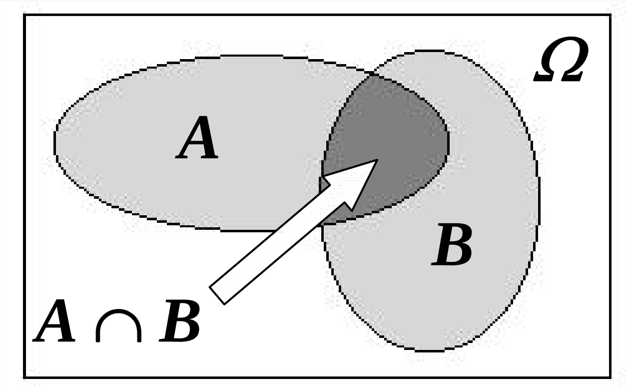


BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Propriedades

- Regra da soma das probabilidades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Probabilidade condicional. Ex. de motivação

Condição do peso	Tipo do leite			
	B (B)	C (C)	UHT (U)	Total
dentro das especificações (D)	500	4500	1500	6500
fora das especificações (F)	30	270	50	350
Total	530	4770	1550	6850

$$P(F) = \frac{350}{6850} = 0{,}051$$

Qual é a probabilidade que esteja fora das especificações, sabendo-se que é leite do tipo UHT?

$$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = 0{,}032$$

$$P(F \mid U) = \frac{50}{1550} = \frac{50/6850}{1550/6850} = \frac{P(F \cap U)}{P(U)}$$

Probabilidade condicional

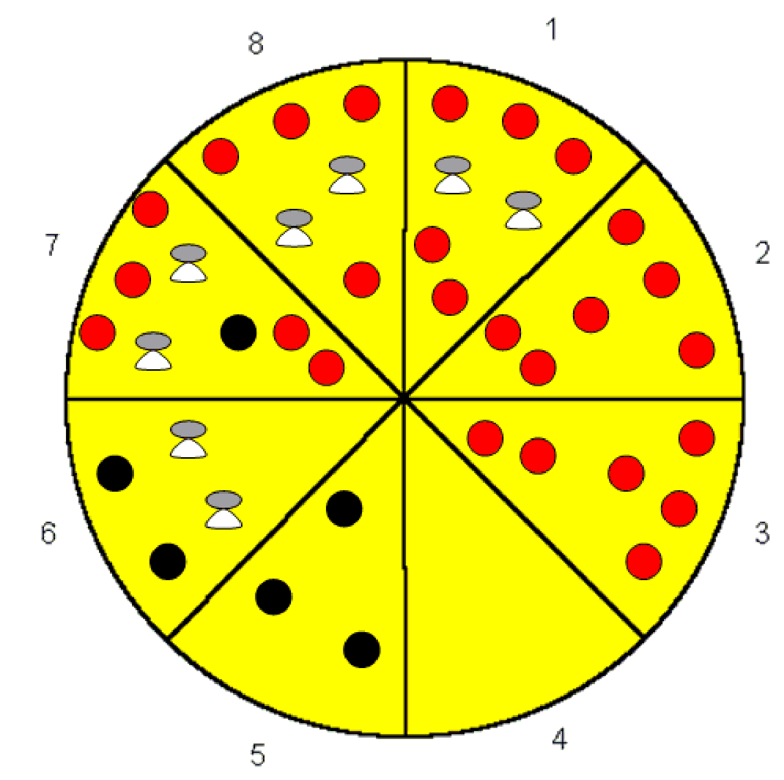
- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo *P*(*B*) > 0. Definimos a *probabilidade condicional de A dado B* por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Sejam *A* e *B* eventos quaisquer, sendo *P*(*A*) > 0. Definimos a *probabilidade condicional de B dado A* por

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidade condicional



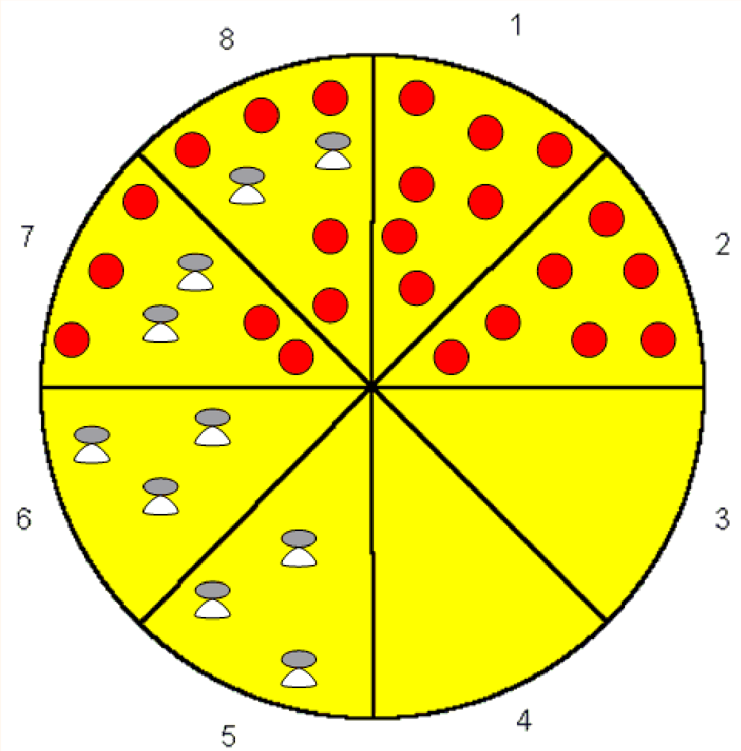
Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$\mathrm{P}(\text{Champignon} \mid \text{Calabresa}) = \frac{\mathrm{P}(\text{Champignon} \cap \text{Calabresa})}{\mathrm{P}(\text{Calabresa})} = \frac{3/8}{5/8} = \frac{3}{5}$$

$$P(Calabresa \mid Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Champignon)} = \frac{3/8}{4/8} = \frac{3}{4}$$

Probabilidade Condicional



Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com champignon supondo que houvesse calabresa nele?

Qual é a probabilidade de selecionar um pedaço com calabresa supondo que houvesse champignon nele?

$$P(Champignon \mid Calabresa) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Calabresa)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

$$P(Calabresa \mid Champignon) = \frac{P(Champignon \cap Calabresa)}{P(Champignon)} = \frac{2/8}{4/8} = \frac{2}{4}$$

Probabilidade condicional. Exemplo

- Seja o lançamento de 2 dados não viciados e a observação das faces voltadas para cima.
- Calcule a probabilidade de ocorrer faces iguais, sabendo-se que a soma é menor ou igual a 5.

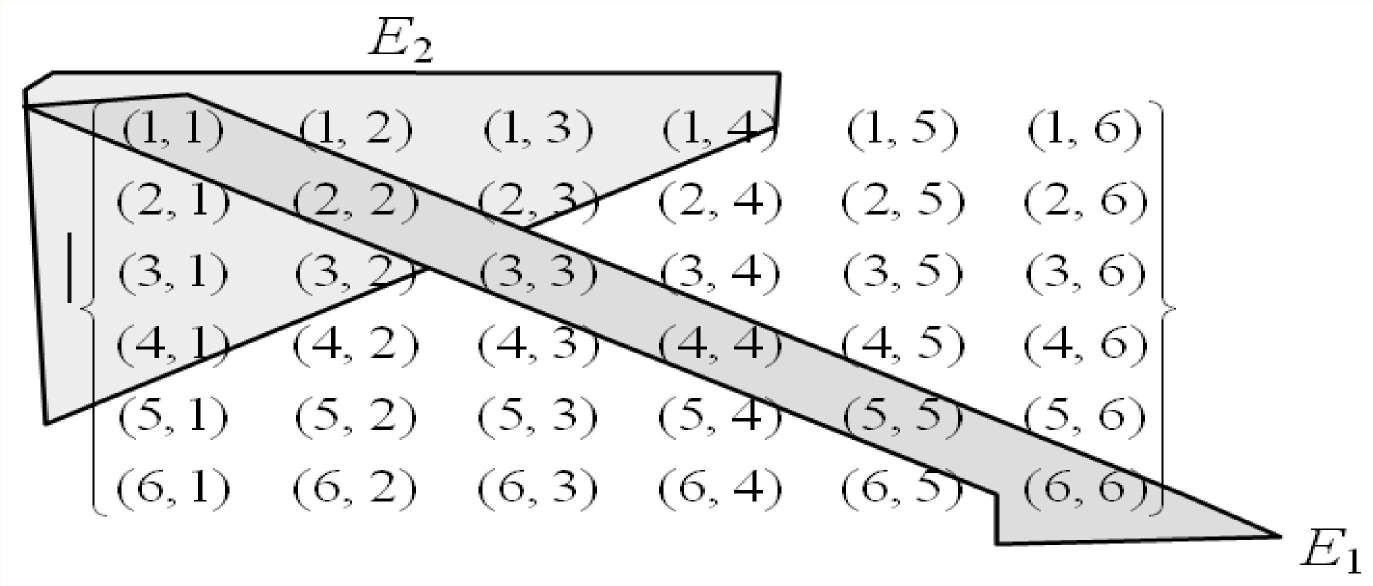
$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

E_1 = *faces iguais* = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}

E_2 = *soma das faces é menor ou igual a 5* =

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (4, 1)}.

Probabilidade condicional. Exemplo



$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{2}{10} = 0{,}2$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_2 \mid \mathrm{E}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2)}{\mathrm{P}(\mathrm{E}_1)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = 0{,}33$$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Regra do produto

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A \mid B)}$$

ou

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

Eventos independentes

- Dois ou mais eventos são **independentes** quando a ocorrência de um dos eventos não influencia a probabilidade da ocorrência dos outros. Nesse caso:

$$P(A \mid B) = P(A)$$

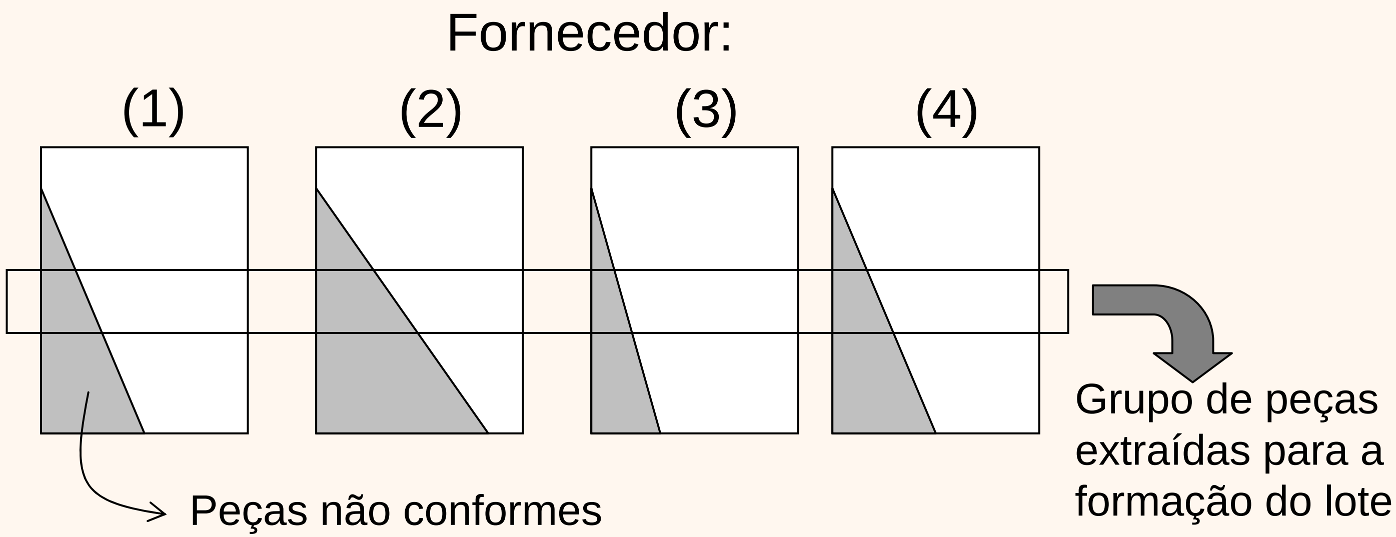
A e B são independentes

$$\Updownarrow$$

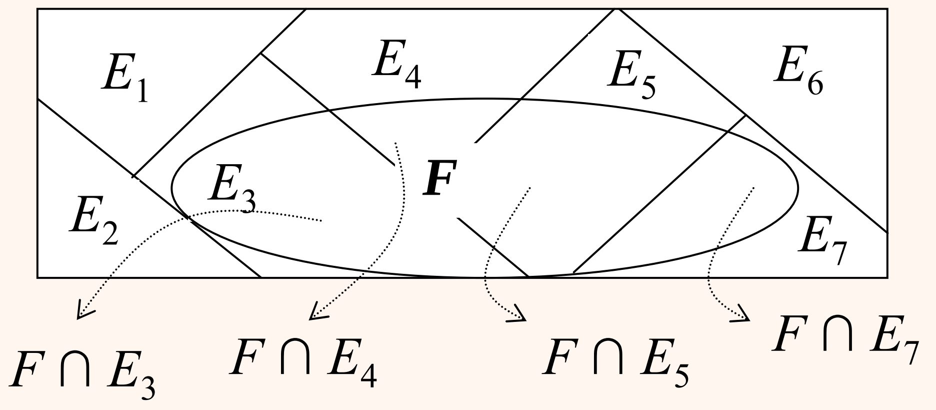
$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B})$$

Teorema da probabilidade total

- Ilustração da formação de um lote de peças provindas de 4 fornecedores



Teorema da probabilidade total



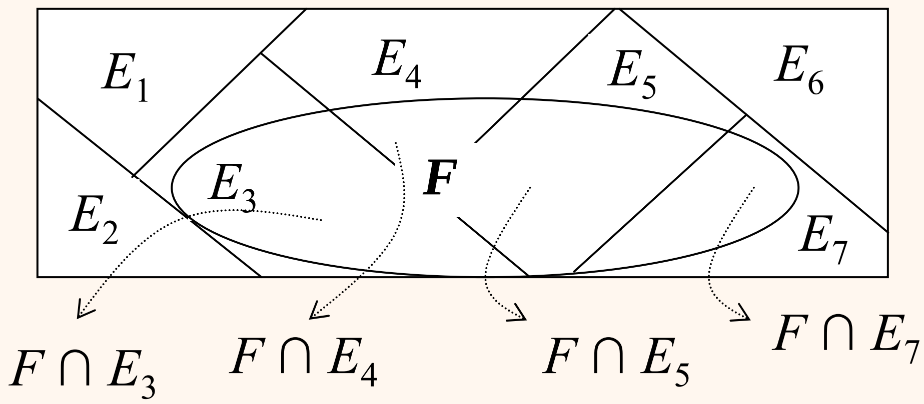
$$F = (F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)$$

$$P(F) = P[(F \cap E_1) \cup (F \cap E_2) \cup \ldots \cup (F \cap E_k)] =$$
$$= P(F \cap E_1) + P(F \cap E_2) + \ldots + P(F \cap E_k)$$

$$P(F) = \sum_{i=1}^{k} P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)$$

BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Teorema de Bayes



$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i \cap F)}{P(F)}$$

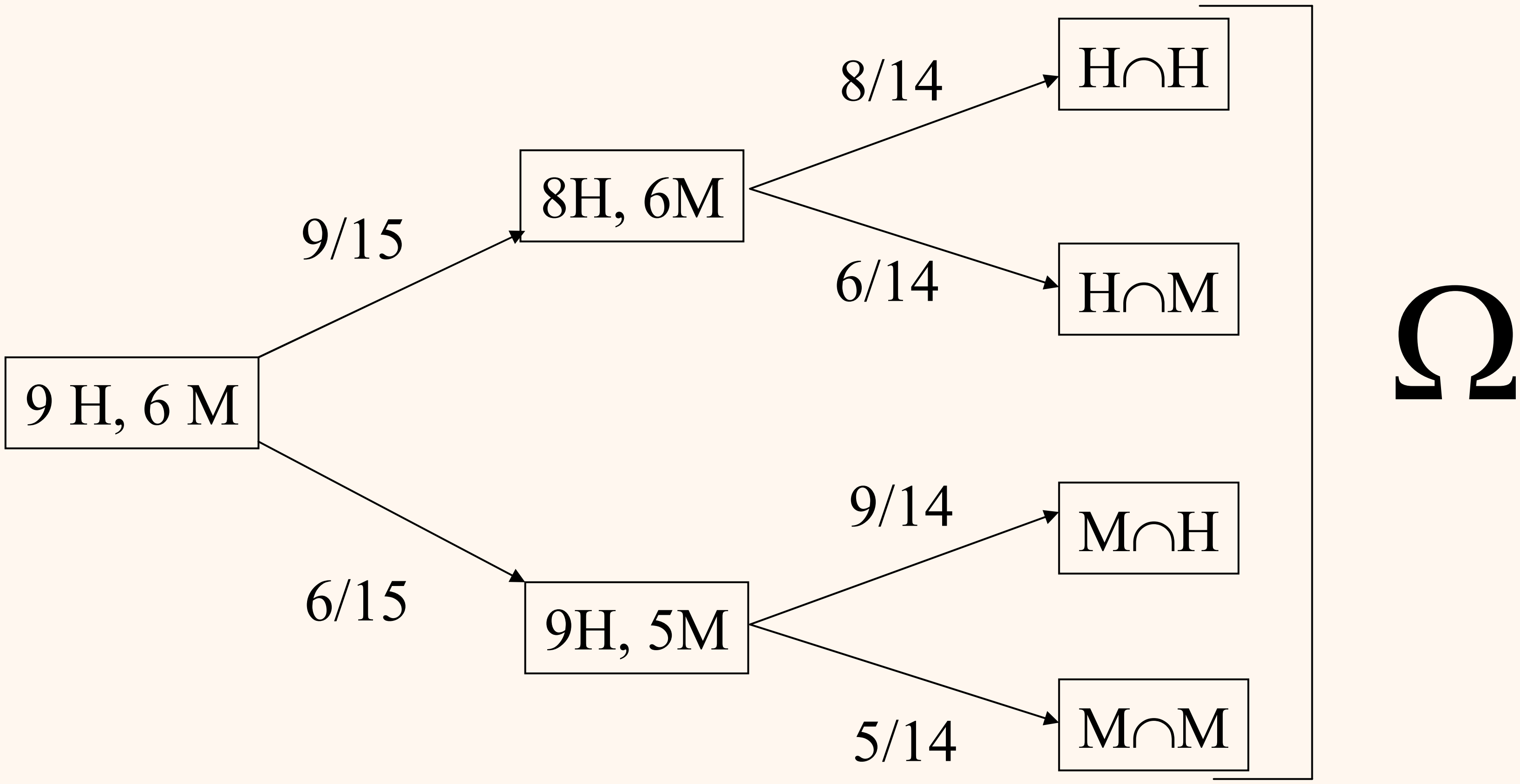
$$\Rightarrow \quad \boxed{P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i) \cdot P(F \mid E_i)}{P(F)}}$$

Exercício

- Após um longo processo de seleção para preenchimento de duas vagas de emprego para engenheiro, uma empresa chegou a um conjunto de 9 engenheiros e 6 engenheiras, todos com capacitação bastante semelhante. Indeciso, o setor de recursos humanos decidiu realizar um sorteio para preencher as duas vagas oferecidas.
- a) Construa o modelo probabilístico para esta situação.
- b) Qual é a probabilidade de que ambos os selecionados sejam do mesmo sexo?
- c) Sabendo-se que ambos os selecionados são do mesmo sexo, qual é a probabilidade de serem homens?

Livro-texto, Página 114.

Árvore de probabilidades



BARBETTA, REIS e BORNIA – Estatística para Cursos de Engenharia e Informática. Atlas, 2004

Modelo probabilístico

$$P(H \cap H) = P(H) \times P(H / H) = \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} = 0{,}3429$$

$$P(H \cap M) = P(H) \times P(M / H) = \frac{9}{15} \times \frac{6}{14} = 0{,}2571$$

$$P(M \cap H) = P(M) \times P(H / M) = \frac{6}{15} \times \frac{9}{14} = 0{,}2571$$

$$P(M \cap M) = P(M) \times P(M / M) = \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} = 0{,}1429$$

Probabilidade mesmo sexo

$$P(\text{Mesmo sexo}) = P(F)$$

$$P(F) = P\{[F \cap (H \cap H)] \cup [F \cap (H \cap M)] \cup [F \cap (M \cap H)] \cup [F \cap (M \cap M)]\}$$

$$P(F) = P[(H \cap H)] \cup (M \cap M)] = P(H \cap H) + P(M \cap M)$$

$$P(F) = P(H) \times P(H / H) + P(M) \times P(M / M)$$

$$P(F) = \frac{9}{15} \times \frac{8}{14} + \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} = 0{,}4858$$

Probabilidade homens, sabendo que são do mesmo sexo

$$P[(H \cap H)/F] = \frac{P(H \cap H) \times P[F/(H \cap H)]}{P(F)}$$

$$P[(H \cap H)/F] = \frac{0,3429}{0,4858} = 0,7058$$