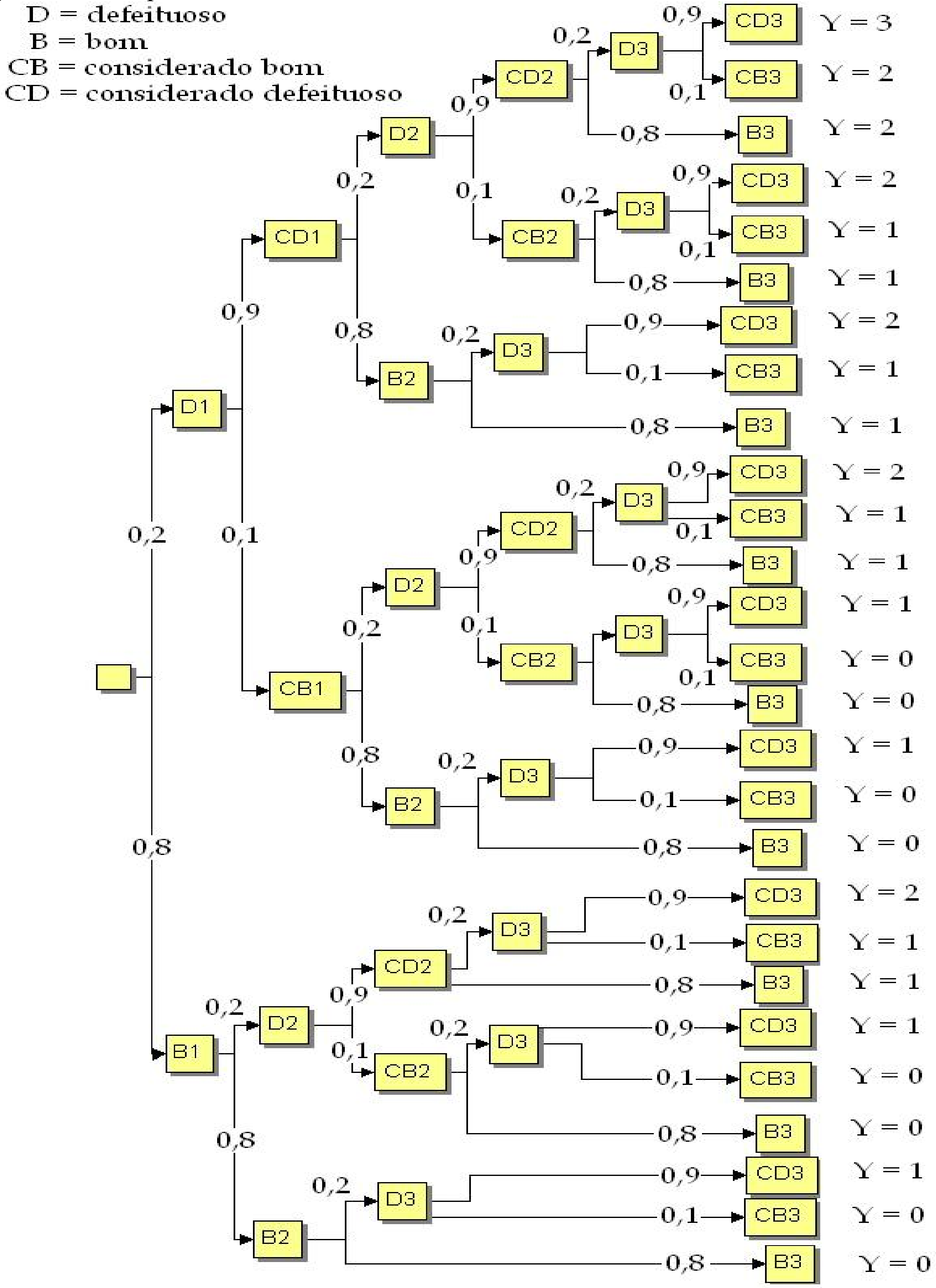
Exemplo 1 - Uma fábrica produz recipientes de vidro. Existe uma probabilidade igual a 0,2 de produzir um recipiente defeituoso. Antes que esses recipientes sejam estocados, eles são inspecionados e os defeituosos são separados. Admita que exista uma probabilidade igual a 0,1 de que um recipiente defeituoso seja mal classificado. Sabe-se que se o recipiente não apresenta defeito ele com certeza será bem classificado. Considere que um inspetor de produção examinou 3 desses recipientes. Seja Y o número de recipientes classificados como defeituosos pelo inspetor.
a) Determine a distribuição de probabilidades de Y. (R.: 0,5514; 0,3631; 0,0797; 0,0058)
b)Calcule E(Y). (R.: 0,54) c) Calcule V(Y). (R.: 0,4428)
a) Veja a árvore de probabilidades abaixo



$P(Y = 3) = P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CD3)]$

O fato do primeiro ser defeituoso não influencia a probabilidade do segundo e terceiro serem defeituosos, assim as três intersecções acima são independentes:

$P(Y = 3) = P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CD3)$

$= [P(D1) \times P(CD1|D1)] \times [P(D2) \times P(CD2|D2)] \times [P(D3) \times P(CD3|D3)]$

As probabilidades de um recipiente ser bom ou defeituoso são constantes, e as probabilidades de considerá-lo defeituoso também.

$P(Y = 3) = [P(D) \times P(CD|D)]^3 = (0{,}2 \times 0{,}9)^3 = 0{,}0058$

$P(Y = 2) = P\{[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$\cup [(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] \cup [(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]$
$\cup [(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CD3)] \cup [(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CD3)]\}$

Trata-se da união de eventos mutuamente exclusivos:

$P(Y = 2) = P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$+ P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] + P[(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]$
$+ P[(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CD3)] + P[(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CD3)]$

O fato do primeiro ser defeituoso não influencia a probabilidade do segundo e terceiro serem defeituosos, assim as três intersecções dentro de cada evento acima são independentes:

$P(Y = 2) = P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CB3) + P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(B3)$
$+ P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CB2) \times P(D3 \cap CD3) + P(D1 \cap CD1) \times P(B2) \times P(D3 \cap CD3)$
$+ P(D1 \cap CB1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CD3) + P(B1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CD3)$

As probabilidades de um recipiente ser bom ou defeituoso são constantes, e as probabilidades de considerá-lo defeituoso também.

$P(Y = 2) = [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times [P(D) \times P(CB|D)] + [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times P(B)$
$+ [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times [P(D) \times P(CB|D)] + [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times P(B)$
$+ [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times [P(D) \times P(CB|D)] + [P(D) \times P(CD|D)]^2 \times P(B)$
$= 3 \times [0{,}2 \times 0{,}9]^2 \times [0{,}2 \times 0{,}1] + 3 \times [0{,}2 \times 0{,}9]^2 \times 0{,}8 = 0{,}079704$

$P(Y = 1) = P\{[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$\cup [(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (B3)]$
$\cup [(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$\cup [(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] \cup [(D1 \cap CB1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]$
$\cup [(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$\cup [(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] \cup [(B1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]\}$

Trata-se da união de eventos mutuamente exclusivos:

$P(Y = 1) = P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1 \cap CD1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$+ P[(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1 \cap CD1) \cap (B2) \cap (B3)]$
$+ P[(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$+ P[(D1 \cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] + P[(D1 \cap CB1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]$
$+ P[(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(B1) \cap (D2 \cap CD2) \cap (B3)]$
$+ P[(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CD3)] + P[(B1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CD3)]$

O fato do primeiro ser defeituoso não influencia a probabilidade do segundo e terceiro serem defeituosos, assim as três intersecções dentro de cada evento acima são independentes:

$P(Y = 1) = P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CB2) \times P(D3 \cap CB3) + P(D1 \cap CD1) \times P(D2 \cap CB2) \times P(B3)$
$+ P(D1 \cap CD1) \times P(B2) \times P(D3 \cap CB3) + P(D1 \cap CD1) \times P(B2) \times P(B3)$
$+ P(D1 \cap CB1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CB3) + P(D1 \cap CB1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(B3)$
$+ P(D1 \cap CB1) \times P(D2 \cap CB2) \times P(D3 \cap CD3) + P(D1 \cap CB1) \times P(B2) \times P(D3 \cap CD3)$
$+ P(B1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(D3 \cap CB3) + P(B1) \times P(D2 \cap CD2) \times P(B3)$
$+ P(B1) \times P(D2 \cap CB2) \times P(D3 \cap CD3) + P(B1) \times P(B2) \times P(D3 \cap CD3)$

As probabilidades de um recipiente ser bom ou defeituoso são constantes, e as probabilidades de considerá-lo defeituoso também.

$P(Y = 1) = P(D) \times P(CD|D)\times [P(D) \times P(CB|D)]^2 + P(D)\times P(CD|D)\times P(D)\times P(CB|D)\times P(B)$
$+ P(D)\times P(CD|D)\times P(B)\times P(D)\times P(CB|D) + P(D)\times P(CD|D) \times P(B)^2$
$+ [P(D)\times P(CB|D)]^2 \times P(D)\times P(CD|D) + P(D)\times P(CD|D)\times P(D)\times P(CB|D)\times P(B)$
$+ [P(D)\times P(CB|D)]^2 \times P(D)\times P(CD|D) + P(D)\times P(CD|D)\times P(D)\times P(CB|D)\times P(B)$
$+ P(D)\times P(CD|D)\times P(D)\times P(CB|D)\times P(B) + P(D)\times P(CD|D) \times P(B)^2$
$+ P(D)\times P(CD|D)\times P(D)\times P(CB|D)\times P(B) + P(D)\times P(CD|D) \times P(B)^2$

$P(Y = 1) = 0{,}2 \times 0{,}9 \times (0{,}2 \times 0{,}1)^2 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8$
$+ 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}8 \times 0{,}2 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}8^2$
$+ (0{,}2\times 0{,}1)^2 \times 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8$
$+ (0{,}2\times 0{,}1)^2 \times 0{,}2 \times 0{,}9 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8$
$+ 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}8^2$
$+ 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}9 \times 0{,}8^2$

$P(Y = 1) = 0{,}363096$

$P(Y = 0) = P\{[(D1\cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1\cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$\cup\ [(D1\cap CB1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(D1\cap CB1) \cap (B2) \cap (B3)]$
$\cup\ [(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$\cup\ [(B1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] \cup [(B1) \cap (B2) \cap (B3)]\}$

Trata-se da união de eventos mutuamente exclusivos:

$P(Y = 0) = P[(D1\cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1\cap CB1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$+ P[(D1\cap CB1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(D1\cap CB1) \cap (B2) \cap (B3)]$
$+ P[(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(B1) \cap (D2 \cap CB2) \cap (B3)]$
$+ P[(B1) \cap (B2) \cap (D3 \cap CB3)] + P[(B1) \cap (B2) \cap (B3)]$

O fato do primeiro ser defeituoso não influencia a probabilidade do segundo e terceiro serem defeituosos, assim as três intersecções dentro de cada evento acima são independentes:

$P(Y = 0) = P(D1\cap CB1)\times P(D2 \cap CB2)\times P(D3 \cap CB3) + P(D1\cap CB1)\times P(D2 \cap CB2)\times P(B3)$
$+ P(D1\cap CB1)\times P(B2)\times P(D3 \cap CB3) + P(D1\cap CB1)\times P(B2)\times P(B3)$
$+ P(B1)\times P(D2 \cap CB2)\times P(D3 \cap CB3) + P(B1)\times P(D2 \cap CB2)\times P(B3)$
$+ P(B1)\times P(B2)\times P(D3 \cap CB3) + P(B1)\times P(B2)\times P(B3)$

As probabilidades de um recipiente ser bom ou defeituoso são constantes, e as probabilidades de considerá-lo defeituoso também.

$P(Y = 0) = [P(D\cap CB)]^3 + 3\times[P(D\cap CB)]^2\times P(B) + 3\times P(D\cap CB) \times [P(B)]^2 + [P(B)]^3$
$= [P(D)\times P(CB|D)]^3 + 3\times[P(D)\times P(CB|D)]^2 \times P(B) + 3\times P(D)\times P(CB|D)\times [P(B)]^2 + [P(B)]^3$
$= (0{,}2 \times 0{,}1)^3 + 3 \times (0{,}2 \times 0{,}1)^2 \times 0{,}8 + 3 \times 0{,}2 \times 0{,}1 \times 0{,}8^2 + 0{,}8^3$
$= 0{,}551368$

A distribuição de probabilidades será:

Y = yi	0	1	2	3
P(yi)	0,551368	0,363096	0,079704	0,0058

E a soma das probabilidades é igual a 1.

b) $E(Y) = \sum (y_i \times p)$ = 0 × 0,551368 + 1 × 0,363096 + 2 × 0,079704 + 3 × 0,0058 = 0,54

c) $V(Y) = \sum (y_i^2 \times p) - E(Y)^2$ = $0^2 \times 0{,}551368 + 1^2 \times 0{,}363096 + 2^2 \times 0{,}079704 + 3^2 \times 0{,}0058 - 0{,}54^2 = 0{,}4428$

Exemplo 2 - A duração anual de paradas devidas à acidentes de trabalho numa empresa A pode ser considerado como uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade dada por:

$f(x) = 0$ para $x < 30$ e $x > 90$

$f(x) = x / 2400$ para $30 \leq x < 50$

$f(x) = (x - 30) / 2400$ para $50 \leq x \leq 90$

Numa tentativa indireta de diminuir os acidentes de trabalho foram estabelecidas determinadas penalidades para as empresas. Desta forma a empresa que ultrapassar 60 horas paradas devidas à acidentes pagará 5000 u.m.; se as horas paradas estiverem entre 40 e 60 a multa será de 4000 u.m. e fora disso a empresa será punida apenas com advertência por escrito. Qual será o valor esperado da multa paga anualmente pela empresa A? (R.: 3979,14 u.m.)

$$P(X > 60) = \int_{60}^{90} f(x)dx = \int_{60}^{90} \frac{(x-30)}{2400} dx = \left[\frac{1}{2400} \times \left(\frac{x^2}{2} - 30x \right) \right]_{60}^{90} = 0{,}5625$$

$$P(40 \leq X \leq 60) = \int_{40}^{50} \frac{x}{2400} dx + \int_{50}^{60} \frac{1}{2400} \times (x-30)dx = \left[\frac{x^2}{4800} \right]_{40}^{50} + \left[\frac{1}{2400} \times \left(\frac{x^2}{2} - 30x \right) \right]_{50}^{60} = 0{,}2917$$

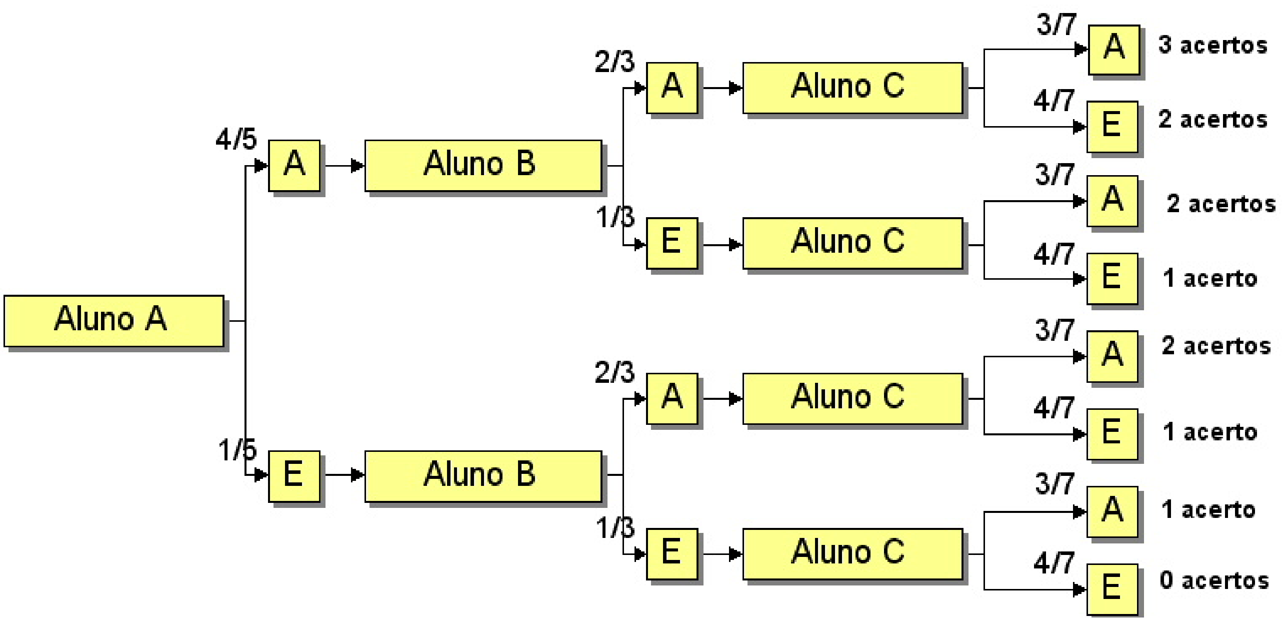
$E(X) = 5000 \times 0{,}5625 + 4000 \times 0{,}2917 = 3979{,}14$

Exemplo 3 - Três alunos estão tentando independentemente resolver um problema. A probabilidade de que o aluno A resolva o problema é de 4/5, de B resolver é de 2/3 e de C resolver é de 3/7. Seja X o número de soluções corretas apresentadas para este problema.

a) Construa a distribuição de probabilidades de X. (R.: 0,038; 0,257; 0,476; 0,228)

b) Calcule E(X) e V(X). (R.: 1,893; 0,630)

Observe a árvore de probabilidades abaixo:



Os alunos tentam resolver as questões independentemente. Observe à direita os valores que a variável aleatória X (número de acertos em três tentativas) pode assumir.

P(X = 3) = P(A acertar ∩ B acertar ∩ C acertar)
Como os alunos tentam resolver as questões independentemente os eventos dentro da intersecção são independentes:
P(X = 3) = P(A acertar) × P(B acertar) × P(C acertar) = 4/5 × 2/3 × 3/7 = 0,22857

P(X = 2) = P[(A acertar ∩ B acertar ∩ C errar) ∪ (A acertar ∩ B errar ∩ C acertar) ∪ (A errar ∩ B acertar ∩ C acertar)]
Trata-se da união de eventos mutuamente exclusivos:
P(X = 2) = P(A acertar ∩ B acertar ∩ C errar) + P(A acertar ∩ B errar ∩ C acertar) + P(A errar ∩ B acertar ∩ C acertar)]
Como os alunos tentam resolver as questões independentemente os eventos dentro das intersecções são independentes:
P(X = 2) = P(A acertar) ×P(B acertar) × P(C errar) + P(A acertar) × P(B errar) × P(C acertar) + P(A errar) × P(B acertar) × P(C acertar)
P(X = 2) = 4/5 × 2/3 × 4/7 + 4/5 × 1/3 × 3/7 + 1/5 × 2/3 × 3/7 = 0,47619

P(X = 1) = P[(A acertar ∩ B errar ∩ C errar) ∪ (A errar ∩ B errar ∩ C acertar) ∪ (A errar ∩ B acertar ∩ C errar)]
Trata-se da união de eventos mutuamente exclusivos:
P(X = 1) = P(A acertar ∩ B errar ∩ C errar) + P(A errar ∩ B errar ∩ C acertar) + P(A errar ∩ B acertar ∩ C errar)]
Como os alunos tentam resolver as questões independentemente os eventos dentro das intersecções são independentes:
P(X = 1) = P(A acertar) ×P(B errar) × P(C errar) + P(A errar) × P(B errar) × P(C acertar) + P(A errar) × P(B acertar) × P(C errar)
P(X = 1) = 4/5 × 1/3 × 4/7 + 1/5 × 1/3 × 3/7 + 1/5 × 2/3 × 4/7 = 0,25714

P(X = 0) = P(A errar ∩ B errar ∩ C errar)
Como os alunos tentam resolver as questões independentemente os eventos dentro da intersecção são independentes:
P(X = 0) = P(A errar) × P(B errar) × P(C errar) = 1/5 × 1/3 × 4/7 = 0,03810

A distribuição de probabilidades será:

X = xi	0	1	2	3
P(xi)	0,03810	0,25714	0,47619	0,22857

E a soma das probabilidades é igual a 1.

b) $E(X) = \sum (x_i \times p)$ = 0 × 0,03810 + 1 × 0,25714 + 2 × 0,47619 + 3 × 0,22857 = 1,893

c) $V(X) = \sum (x_i^2 \times p) - E(X)^2$ = 0^2 × 0,03810 + 1^2 × 0,25714 + 2^2 × 0,47619 + 3^2 × 0,22857 – $1{,}893^2$ = 0,630

Exemplo 4 - Em um dia de bastante movimento o tempo que um cliente espera para ser atendido no caixa de um supermercado pode ser considerado uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidades é dada por:

$f(x) = 0$ para $x < 4$ e $x > 14$
$f(x) = 2/35$ para $4 \leq x < 9$
$f(x) = (28 - 2x)/35$ para $9 \leq x \leq 14$

Sendo x em minutos. Suponha que um cliente esteja esperando para ser atendido há 7 minutos, determine a probabilidade de que seu tempo total de espera seja menor do que 11 minutos. (R.: 0,6896)

$$P(X < 11 \mid X > 7) = \frac{P(7 < X < 11)}{P(X > 7)}$$

$$P(X > 7) = \int_7^9 \frac{2}{35}dx + \int_9^{14}\left(\frac{28-3x}{35}\right)dx = \left[\frac{2x}{35}\right]_7^9 + \left[\frac{28x - x^2}{35}\right]_9^{14} = 0{,}8285$$

$$P(7 < X < 11) = \int_7^9 \frac{2}{35}dx + \int_9^{11}\left(\frac{28-3x}{35}\right)dx = \left[\frac{2x}{35}\right]_7^9 + \left[\frac{28x - x^2}{35}\right]_9^{11} = 0{,}5714$$

$$P(X < 11 \mid X > 7) = \frac{0{,}5714}{0{,}8285} = 0{,}6896$$