# Introdução à Teoria das Wavelets


João Cândido Dovicchi

dovicchi@demac.ufu.br

Laboratório de Música e Computação

Núcleo Avançado de Computação Sônica e Multimídia

Universidade Federal de Uberlândia


*Tech. Report*

16 de Fevereiro de 2003


**Resumo**

O tratamento de sinais de áudio para gravações, reproduções, síntese de timbres e outras finalidades, requer uma certa base matemática. Normalmente, os laboratórios de música e computação, que desenvolvem pesquisa nesta área, têm grande dificuldade de encontrar pessoal com esta qualificação. Assim, nasceu a idéia de se produzir alguns artigos básicos, no formato de relatórios técnicos (*technical report*), para auxiliar os pesquisadores.

Em nosso laboratório, o foco principal da pesquisa tem se voltado para a aplicação de transformadas, principalmente as *Wavelet*s, além da utilização de recursos de processamento paralelo, métodos de *lifting* e programação funcional. Este relatório técnico aborda os fundamentos teóricos das *Wavelet*s e, embora seja necessário um certo conhecimento de matemática, não se aprofunda na demonstração de grande parte destes conceitos.


## 1 Um breve histórico

De 20 anos para cá, a Teoria das *Wavelet*s têm despertado enorme interesse em todas as áreas da ciência. Na realidade a teoria matemática em que é baseada não é nova, remontando mais de 80 anos, como mostra Daubechies em seu artigo [3], discorrendo sobre a origem matemática das *Wavelet*s.

Os trabalhos de A. Grossman and J. Morlet [10] foram os responsáveis por esse recente interesse de engenheiros e matemáticos na construção de bases para análise clássica de harmônicos e de outros espaços de funções. Em seu trabalho, na busca de integrais quadráticas do tipo $ax + b$, chegaram ao problema de construção de uma base para $L^2(\mathbf{R})$ a partir de um conjunto discreto de $ax+b$.

Y. Meyer [12] encontrou uma função especial, que ele denominou *Wavelet*, suave e cuja oscilação, acima e abaixo do eixo do $x$, tendia a zero no infinito, e cuja órbita discreta formava uma base de Hilbert para $L^2(\mathbf{R})$ e uma base incondicional para todos os espaços comuns de Banach das funções em $\mathbf{R}$. P. G. Lemarié [11] usou estas funções para provar certos fatos básicos da álgebra dos operadores de Calderón-Zygmund.

Recentemente, I. Daubechies [4] encontrou um algoritmo para contruir outras *Wavelet*s para espaços de funções particulares, incluindo *Wavelet*s compactas ortonormais. Um base ortonormal é uma base ortogonal em que os vetores são unitários, tal que sua norma é unitária, ou seja:

$$\|a_i\| = 1 \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{a_i \times a_i} = \|a_i\| \tag{1}$$

Isto possibilitou a aplicação destas transformadas na análise de sinais que, particularmente no campo dos sinais de áudio, mostraram-se efetivas na análise e compactação de dados digitais.

A vantagem das *Wavelet*s sobre os métodos tradicionais de Fourier, é que as funções base de Fourier são depentes da freqüência mas não do tempo, ou seja, pequenas alterações no domínio da freqüência produzem alterações em todo o domínio do tempo. As *Wavelet*s são dependentes de ambos os domínios, da freqüência (via dilatação) e do tempo (via translação) o que é uma vantagem em diversos casos.

A dilação é uma função que toma um vetor e retorna outro vetor, múltiplo do vetor dado, ou seja: $\overrightarrow{v} \to \alpha\overrightarrow{v}$, onde $\alpha$ é um escalar qualquer e $\overrightarrow{v}$ um vetor de qualquer espaço vetorial. A translação é uma função que soma um vetor constante $\overrightarrow{k}$ a um vetor dado, ou seja: $\overrightarrow{v} \to \overrightarrow{k} + \overrightarrow{v}$, onde $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{k}$ são vetores de qualquer espaço vetorial.

As bases das funções de Fourier não são adequadas para o tratamento local de dados, uma vez que são séries infinitas e, também, não se adaptam à análise de dados descontínuos. As *Wavelet*s não só podem ser usadas na aproximação de funções finitas, como também servem para análise de dados descontínuos.

## 2 O que são Wavelets?

As *Wavelets* são funções que satisfazem certas propriedades específicas. Uma delas é a propriedade de integrar a zero — ondulando acima e abaixo do eixo $x$ — e outras propriedades técnicas que asseguram o cálculo rápido e fácil da transformada direta e inversa. Assim como senos e cossenos são funções–base na análise de Fourier, *Wavelets* são usadas como funções–base na representação de outras funções [16].

Existem vários tipos de *Wavelets*, dentre as quais a mais simples é a *Wavelet* de Haar:

$$\psi_{jk}(x) = \text{constante} \cdot \psi(2^j x - k), \tag{2}$$

onde $\psi$ define uma base ortogonal em $L^2(\mathbf{R})$, ou seja, cada elemento em $L^2(\mathbf{R})$ pode ser representado por uma combinação linear (que pode ser infinita) dessas funções–base. Gootman e Wickerhauser [8] apresentam condições necessárias e suficientes para que funções em $L^2(\mathbf{R})$ suportem transformadas compactas de Fourier, para gerar bases ortogonais através de translações de inteiros e dilações quadráticas.

Uma vez estabelecida uma base *Wavelet* $\psi(x)$ — chamada *Wavelet mãe* — pode-se estabelecer bases de translação e dilação da *Wavelet mãe*, tal que:

$$\left\{ \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), (a,b) \in \Re^+ \times \Re \right\}, \tag{3}$$

onde os valores de $a$ e $b$ devem ser selecionados convenientemente, na definição da base, tal que: $a = 2^{-j}$ e $b = k \cdot 2^j$, onde $k$ e $j$ são inteiros. A escolha de $a$ e $b$ nos dará uma base esparsa e, além disso possibilitará a análise com múltiplas resoluções no processamento de sinais.

A grande vantagem das *Wavelets* está no fato de que a análise no domínínio do tempo é feita por meio de uma contração — versão de alta freqüência da *Wavelet mãe* —, enquanto a análise no domínínio da freqüência é feita por uma dilação — versão de baixa freqüência da *Wavelet mãe* — dos espaços da função.

Assim como na análise de Fourier, a aplicação da transformada *Wavelet* a um conjunto finito de dados discretos (digitais) é uma convolução entre este sinal e os coeficientes da função. A transformação do sinal é biortogonal, ou seja, o sinal obtido pela transformação é recuperado pela mesma função.

As bases das funções *Wavelets* (*wavelet basis*) podem ser descritas como conjuntos de funções definidas por equações diferenciais recursivas, tal que:

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{M-1} c_n \phi(2x - n), \tag{4}$$

onde o número de coeficientes diferentes de zero — ordem da *Wavelet* representada por $M$ — determina o número de iterações da somatória.

A resolução da equação 4 pode ser feita por meio da construção de uma matriz $M \times M$ dos valores dos coeficientes $L_{ij} = c_{2i-j}$. Esta matriz tem valor próprio (*eigenvalue*) igual a 1 e o vetor próprio (*eigenvector*) correspondente é composto pelos valores da função $\phi$ para valores inteiros de $x$. Conhecidos estes valores, todos os valores da função $\phi(x)$ podem ser obtidos usando-se a aplicação recorrente da equação para obtenção de $x/2$, $x/4$ e assim por diante até chegar à dilação desejada.

# 3 Fundamentos matemáticos

A fundamentação matemática que se segue encontra-se descrita com maiores detalhes e profundidade por diversos autores [5, 6, 14, 15, 17]. Numa tentativa de tornar os conceitos matemáticos complexos que envolvem a teoria das *Wavelet*s mais acessíveis, optou-se por um tratamento menos formal, incluindo-se alguns conceitos prévios que foram considerados necessários para a compreensão da teoria das *Wavelet*s. Tais conceitos já são axiomas das teorias matemáticas modernas.

## 3.1 Espaços de Hilbert

O *Espaço de Hilbert* é definido como um subconjunto **H** de um conjunto de números complexos, que satisfaz as seguintes propriedades [9]:

1. **H** é um espaço vetorial, ou seja, os vetores em **H** podem ser somados ou multiplicados por escalares complexos conforme as regras usuais da aritmética de vetores;

2. **H** tem um *produto interno*, ou seja, quaisquer vetores $x$ e $y$ em **H** podem ser multiplicados de forma a produzir um escalar representado por $< x, y >$. O *produto interno* do vetor $x$ por si mesmo ($< x, x >$) é um escalar real positivo, cuja raíz quadrada é a norma de $x$ ($\|x\|$), ou seja,

$$\sqrt{< x, x >} = \|\vec{x}\|; \tag{5}$$

3. Dados dois vetores $x$ e $y$ em **H**, a medida $\|x - y\|$ pertence ao espaço, o que faz com que **H** tenha uma estrutura espacial mensurável;

4. **H** tem uma medida espacial completa no que diz respeito à distância definida pela sua norma ($\|H\|$), ou seja, a distância entre os vetores $x_n$ e $x_m$ tende a zero, quando $n \to \infty$ e $m \to \infty$ e $x_n$ tende a $x$ em **H**. Em outras palavras, se $\|x_n - x_m\| \to 0$, então $\|x_n - x\| \to 0$ para qualquer $x$ em **H**.

Dados dois vetores $x$ e $y$ em um *Espaço de Hilbert* **H**, diz-se que são ortogonais se seu *produto interno* é zero, ou seja,

$$< x, y >= 0, \tag{6}$$

o conjunto de vetores $\{x_i\}$, $i \in A, A = \{1, 2, 3, \ldots\}$, é dito que é *ortogonal* se quaisquer dois de seus elementos são ortogonais. Tal conjunto será *ortonormal* se seus vetores tiverem norma igual a 1.

Uma *base ortonormal* de **H** é um conjunto ortonormal e pode ser demonstrado que qualquer vetor em **H** pode ser representado como o limite da combinação linear da base ortonormal. O número de elementos da base se denomina a *dimensão* de **H**.

## 3.2 Bases de Hilbert e Séries de Fourier

Os coeficientes de *Fourier* de um vetor $x$ em relação a um conjunto ortonormal $\{x_i\}$ é definido como:

$$\hat{x}(i) =< x, x_i > , \tag{7}$$

onde $\hat{x}$ é uma função complexa definida no conjunto de índice $A$:

$$\hat{x} : A \to C \tag{8}$$

A série:

$$\sum_i \hat{x}(i) x_i \tag{9}$$

é chamada de *Série de Fourier* de $x$. Se $\{x_i\}$ for uma base ortonormal, pode-se escrever:

$$x = \sum_i \hat{x}(i) x_i \tag{10}$$

## 3.3 Subespaços e Projeções Ortogonais

Um *subespaço fechado* de um espaço de Hilbert (**H**) é um subconjunto $S \subset H$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $x$ e $y$ forem dois vetores em $S$, e $\alpha$ e $\beta$ forem escalares arbitrários, então:

$$\alpha x + \beta x \in S \tag{11}$$

2. Se $x_n \in S$ e o $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ então $x \in S$.

Dado um vetor $x \in H$ e um subespaço fechado $S \subset H$, demonstra-se que existe um e apenas um vetor $p \in S$, próximo de $x$ e um vetor $q = x - p$ tal que $q \perp S$, chamado de *projeção ortogonal* de $x$ em $S$, e $x = p + q$, se $p \in S$ e $q \perp S$.

Se $\{x_i\}_{i\in A}$ é um conjunto ortonormal de vetores, $S$ é um subspaço fechado em extensão a este conjunto, $x$ é um vetor em **H** e $p$ é a sua projeção ortogonal em $S$, então pode-se escrever:

$$p = \sum_i \hat{x}(i) x_i \tag{12}$$

Se $x \in S$ então $p = x$ e, ainda, se $\{x_i\}_{i\in A}$ é uma base ortonormal, então $x = p$ para qualquer $x \in H$, logo:

$$x = \sum_i \hat{x}(i) x_i \tag{13}$$

Entretanto, como $\{x_i\}_{i\in A}$ não é o máximo conjunto de vetores ortonormais, a equação acima só é válida para os vetores $x \in S$.

## 3.4 Propriedades

Seja $\{u_\alpha\}$ uma base ortogonal, então:

1. Qualquer vetor $x$ em **H** pode ser representado como uma série de *Fourier*. (cf. equação 13)

2. Dados $\vec{x}$ e $\vec{y}$ em **H**, pode-se escrever:

$$< x, y >= \sum_i \hat{x}(i)\overline{\hat{y}(i)} \tag{14}$$

e também,

$$\|x\|^2 = \sum_i |\hat{x}(i)|^2 \tag{15}$$

3. Se $x = \sum_i c_i x_i$ para alguma seqüência de números complexos $c_i$ então $c_i = \hat{x}(i)$.

Se $L^2(A)$ é um conjunto complexo de elementos, cuja soma quadrática é finita, a correspondência $x \longmapsto \hat{x}$ é biunívoca, é um operador de $\mathbf{H}$ em $L^2(A)$ e preserva o produto interno.

### 3.5 Bases Canônicas

Seja

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ e_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1), \end{aligned}$$

o conjunto $\{e_k\}$, onde $1 \leq k \leq n$, forma uma base ortogonal $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ chamada *base canônica*.

No caso da série de *Fourier*, os coeficientes do vetor $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n]$ são seus componentes, ou seja:

$$\begin{aligned} \hat{x}(1) &= \; < x, e_1 > \; = x_1 \\ \hat{x}(2) &= \; < x, e_2 > \; = x_2 \\ \hat{x}(3) &= \; < x, e_3 > \; = x_3 \\ &\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \hat{x}(n) &= \; < x, e_n > \; = x_n \end{aligned}$$

## 4 Transformada Discreta de Fourier

Seja $\omega = e^{-i2\pi/n}$ e $k$ um inteiro tal que $0 \leq k \leq n-1$ e

$$u_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1, \omega^k, \omega^{2k}, \cdots, \omega^{(n-1)k}\right), \tag{16}$$

sendo$\{u_k\}$ é uma base ortogonal tem-se que:

$$\hat{x}(k) =< x, u_k >= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{-jk} \tag{17}$$

e $\hat{x}$ é chamada *transformada discreta de Fourier*, onde $x$ é dado pela equação inversa:

$$x = \sum_{j=0}^{n-1} \hat{x}(j) u_j \tag{18}$$

que pode ser escrita como:

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{j=n-1} x_j \omega^{jk} \tag{19}$$

## 4.1 A série de Fourier Clássica

Seja:

$$e_k(t) = e^{ikt} \tag{20}$$

para cada $k$ inteiro (positivo ou negativo), $e_k$ constitui um conjunto ortonormal em $\mathbf{L}^2\,[0, 2\pi]$.

Além disso, pode ser demonstrado que este conjunto forma uma base trigonométrica ortonormal, cujos coeficientes da função $f \in L^2[0, 2\pi]$ são dados por:

$$\hat{f}(k) =< f, e_k >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt \tag{21}$$

A série de Fourier de $f$ é dada, então, por:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{-ikt} \tag{22}$$

cuja convergência é o limite da norma de $\mathbf{L}^2$, ou:

$$\lim_{n \to \infty} = \|f - \sum_{-n}^{+n} \hat{f}(k) e_k\|_2 = 0 \tag{23}$$

Esta é a série clássica de Fourier para uma função periódica em $2\pi$.

## 4.2 A Transformada Clássica de Fourier

A transformada clássica de uma função $f$ não periódica é definida como:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ikt}dt \tag{24}$$

onde $k$ é uma variável real contínua. A Transformada Inversa é dada por:

$$f(t) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikt}dk \tag{25}$$

A transformada de Fourier é normalmente definida para o espaço $\mathbf{L}^1[-\infty, +\infty]$, ou seja, é requisito básico que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < \infty \tag{26}$$

Isto garante que $\hat{f}(k)$ satisfaça as seguintes propriedades:

1. a função $\hat{f}(k)$ é definida para todas as freqüências $k$;
2. $\hat{f}(k)$ é uma função contínua de $k$;
3. $\hat{f}(k)$ tende a zero quando $k \to \pm\infty$;

Entretanto, demonstra-se que a Transformada de Fourier pode ser aplicada ao espaço $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$, ou seja, sinais analógicos de energia finita. A única diferença é que, neste caso, a transformada pode não ser contínua ou pode não tender a zero para as freqüências próximas a $\pm\infty$, ou ainda podem não ser definidas para valores isolados de $k$ em freqüências zero[9].

A Transformada de Fourier no espaço $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ deve satisfazer as seguintes propriedades[1]:

1. É uma transformação unívoca de $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ em si mesma;
2. Preserva as normas da função, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk \tag{27}$$

[1]**Nota:** A Transformada de Fourier em $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ não pode ser considerada como uma base ortonormal, porque as funções $e^{ikt}$ não constituem uma base ortonormal já que não possuem norma finita em $\mathbf{L}^2$ e também em $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$.

3. Preserva os produto interno[2], ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)\overline{\hat{g}(k)}dk. \tag{28}$$

# 5 Wavelets

## 5.1 A *Wavelet* de Haar

A *Wavelet* com os mais simples coeficientes no espaço $\mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ é denominada *Wavelet* de Haar [5] que pode ser definida como uma função $\psi$ onde:

$$\psi_k^j(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k) \tag{29}$$

## 5.2 *Wavelet*s Ortonormais

Dada uma função $\psi \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$, é dita que é ortonormal se as funções $\psi_k^j$ formarem uma base ortonormal[2]. Os índices $j$ e $k$ desta base são inteiros representados pelo conjunto $\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$. O fator $2^{j/2}$ garante que $||\psi_k^j||^2 = ||\psi||^2$ e, portanto, é requisito que $||\psi||^2 = 1$.

Dada uma função $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ os *coeficientes wavelets* de $f$ são seus coeficientes de Fourier na base $\psi_k^j$, ou seja, os escalares

$$c_k^j = < f, \psi_k^j > = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\psi_k^j(t)}dt \tag{30}$$

e, portanto,

$$f(t) = \sum_{(j,k)\in Z\times Z} c_k^j \psi_k^j(t). \tag{31}$$

Esta série é a *série wavelet* de $f$.

## 5.3 Wavelet de Haar

A *Wavelet* de Haar é a função

$$\psi(t) = \begin{cases} +1 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

A função

[2] Esta última propriedade chama-se **Identidade de Parseval**.

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t < 0 \quad t \geq 1 \end{cases}$$

é chamada de *função escalonante* de $\psi(t)$ e pode-se observar que:

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0^1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1^1(t) \tag{32}$$

e

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_0^1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1^1(t). \tag{33}$$

A equação 32 é a *equação de dilação* do sistema de Haar e os coeficientes $h_k$ do **filtro wavelet** são:

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad\qquad h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para provar que as funções $\psi_k^j$ formam uma base ortonormal, tem-se que demonstrar que:

1. São mutualmente ortogonais, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k^j(t)\psi_m^l(t)dt = 0 \tag{34}$$

   sempre que $(j,k) \neq (l,m)$.

2. Que têm norma unitária, ou seja, para qualquer índices $(j,k)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_k^j(t)|^2 dt = 1. \tag{35}$$

3. Que qualquer função $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ pode ser representada pela série wavelet, ou seja:

$$f(t) = \sum_{(j,k)\in Z\times Z} c_k^j \psi_k^j(t). \tag{36}$$

Os itens (1) e (2) podem ser facilmente verificados e o item 3 pode ser demonstrando pelo seguinte teorema[3]:

[3] O detalhamento da demonstração desse teorema se encontra no livro de Ingrid Daubechies [5]

**Teorema 5.1** *Qualquer função* $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ *pode ser representada pela série wavelet de Haar (cf. equação 36).*

**Corolário 5.1** *Seja a função* $f$ *uma função característica no intervalo diádico*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t < 0 \qquad t \geq 1 \end{cases},$$

*pode-se escrever*

$$f(t) = \frac{1}{2}f(t/2) + \frac{1}{2}\psi(t/2) = \frac{1}{2}f(t/2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0^{-1}(t). \tag{37}$$

*Fazendo-se a substituição de* $t$ *por* $t/2$

$$f(t/2) = \frac{1}{2}f(t/4) + \frac{1}{2}\psi(t/4) = \frac{1}{2}f(t/4) + \psi_0^{-2}(t) \tag{38}$$

*e substituindo-se na expressão anterior, tem-se:*

$$f(t) = \frac{1}{4}f(t/4) + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\psi_0^{-2} + (\frac{1}{\sqrt{2}})\psi_0^{-1}. \tag{39}$$

*Repedindo-se a substituição até o n-ésimo fator, tem-se:*

$$f(t) = (\frac{1}{2})^n f(t/2^n) + (\frac{1}{\sqrt{2}})^n\psi_0^{-n} + \cdots + (\frac{1}{\sqrt{2}})\psi_0^{-1}. \tag{40}$$

**Corolário 5.2** *Seja o erro* $\varepsilon_n(t) = (\frac{1}{2})^n f(t/2^n)$ *observa-se que este torna-se muito pequeno conforme* $n$ *aumenta, ou seja:*

$$\|\varepsilon_n\|_2 = 2^{-n/2} \longmapsto 0 \qquad \text{e, portanto,}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{\sqrt{2}})^n\psi_0^{-n}(t) \tag{41}$$

**Corolário 5.3** *Seja* $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ *tal que seu valor seja* $0$*, fora do intervalo dádico* $[0, 1]$*,* $f$ *pode ser aproximada a menos de um erro, conforme*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} s_k\phi_k^n(t) + \varepsilon'_n(t) \tag{42}$$

*onde* $\|\varepsilon'_n\|_2 \longmapsto 0$*, quando* $n \longmapsto \infty$*.*

**Demonstração 5.1** *A função $\phi$, bem como as funções $\phi_k^j$ podem ser expressas como somas de séries de Haar, portanto $f$ pode ser aproximada, a menos de um erro, por intermédio de combinações lineares de funções de Haar. Isto implica que $f$ pode ser expressa através de séries de Haar.*

*Seja $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ arbitrária, pode-se aproximá-la por meio de outra função que tome valores zero fora do mesmo intervalo diádico, ou seja:*

$$f(t) = f_n(t) + \varepsilon_n''(t) \tag{43}$$

*onde $\|\varepsilon_n''\|_2 \longmapsto 0$ quando $n \longmapsto \infty$.*

*Assim, sendo que $f_n$ pode ser expressa como série de Haar, segue que o mesmo tem que ser verdadeiro para $f$, completando a demonstração do teorema 5.1.*

## 5.4 Cálculo dos Coeficientes de Haar

Seja $\psi$ a transformada *Wavelet* de Haar e $\phi$ a função escalonante, nota-se que:

$$\phi_k^j(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{2k}^{j+1}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{2k+1}^{j+1}(t) \tag{44}$$

e

$$\psi_k^j(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{2k}^{j+1}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{2k+1}^{j+1}(t) \tag{45}$$

Dada uma função $f \in \mathbf{L}^2[-\infty, +\infty]$ pode-se calcular seus coeficientes de Haar $c_k^j$, desde que, para um inteiro $n$, sejam dados valores amostrados $s_k$, ou seja, "médias" de $f$

$$s_k^n = 2^{n/2} \int_{k/2^n}^{(k+1)/2^n} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi_k^n(t)dt, \tag{46}$$

onde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Se definirmos valores de $j < n$ para todos os inteiros $k$, podemos calcular

$$s_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\phi_k^n(t)dt \qquad \text{e} \tag{47}$$

$$c_k^j = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_k^n(t)dt. \tag{48}$$

Pelas equações 44 e 45, é possível escrever:

$$s_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k}^{j+1} + s_{2k+1}^{j+1}) \qquad \text{e} \qquad c_k^j = \frac{1}{\sqrt{2}}(s_{2k}^{j+1} - s_{2k+1}^{j+1}) \tag{49}$$

Assim, por meio de várias iterações, a partir de um conjunto de amostras

$$\ldots, s_{-1}^n, s_0^n, s_1^n, \ldots$$

calcula-se

$$\ldots, s_{-1}^{n-1}, s_0^{n-1}, s_1^{n-1}, \ldots$$

e

$$\ldots, c_{-1}^{n-1}, c_0^{n-1}, c_1^{n-1}, \ldots,$$

então, calcula-se

$$\ldots, s_{-1}^{n-2}, s_0^{n-2}, s_1^{n-2}, \ldots$$

e

$$\ldots, c_{-1}^{n-2}, c_0^{n-2}, c_1^{n-2}, \ldots,$$

e assim, sucessivamente, até que se tenha atingido o número desejado de coeficientes Haar a ser calculado [7].

Este algoritmo é denominado *algoritmo em pirâmide* [1] e pode ser representado esquematicamente por:

$$\begin{array}{ccccccccc} s_k^n \rightarrow & s_k^{n-1} \rightarrow & s_k^{n-2} \rightarrow & s_k^{n-3} \rightarrow & \cdots \\ & \searrow c_k^{n-1} & \searrow c_k^{n-2} & \searrow c_k^{n-3} & \searrow \cdots \end{array}$$

## 5.5 Análise de Multiresolução

A *análise de multiresolução* [5] via uma função escalonante $\phi$ é uma seqüência crescente de subespaços $\mathbf{V}_j$ de $\mathbf{L}^2[-\infty,+\infty]$ próximos, tal que:

$$\cdots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Densidade*, ou seja, $\cup_j V_j$ é densa em $\mathbf{L}^2[-\infty,+\infty]$.
2. *Separação*, ou seja, $\cap_j V_j = 0$.
3. *Escalabilidade*, ou seja, $f(t) \in V_j \Longleftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$ para todos os inteiros $j$ e funções $f$ arbitrárias.
4. *Ortonormalidade*, ou seja, as funções $\phi(t-k)$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ forma uma base ortonormal de $V_0$.

A análise de multiresolução $\{V_j\}$ é dita gerada pela função escalonante $\phi$, no sentido de que para cada $j$ o subespaço $V_j$ é gerado por funções $\phi_k^j$, para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Das propriedades 3 e 4 segue que $\{\phi_k^j\}$ é base ortonormal de $V_j$ para cada $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. E, considerando que $\phi \in V_0 \subset V_1$, pode-se escrever:

$$\phi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \phi_k^1(t) \qquad \text{ou} \tag{50}$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \phi(2t-k). \tag{51}$$

A equação 51 é chamada de *Equação de Dilação*, e os coeficientes $h_k$ são os *coeficientes do filtro wavelet* da análise de multiresolução[4].

A transformada de Fourier da *Equação de Dilação* pode ser escrita como:

$$\hat{\phi}(\xi) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} h_k e^{-ik\xi/2} \right) \hat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{52}$$

[4] A caracterização das funções $\phi$ (*Funções Escalonantes*) é complicada, enquanto a caracterização das seqüências de números complexos que formam os filtros *Wavelets* é mais fácil. Uma vez conhecidos os coeficientes *Wavelets* a função escalonante $\phi$ pode ser construída por meio da equação 51.

## 5.6 Coeficientes Wavelets

Os coeficientes de filtros wavelets devem satisfazer a equação

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |h_k|^2 = 1, \tag{53}$$

posto que $\|\phi\| = 1$ [13].

Onde $h_k$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} h_k &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\overline{\phi_k^1(t)}dt \qquad (54)\\ &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\overline{\phi(2t-k)}dt \qquad (55)\end{aligned}$$

A ortogonalidade de $\phi$, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\overline{\phi(t-k)}dt = \delta(k,0), \tag{56}$$

onde $\delta$ é o símbolo de Kronecker[5], pode ser expressa em termos da equação de dilação.

$$\sum_m \sum_n h_m \overline{h_n} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2t-m)\overline{\phi(2t-2k-n)}dt = \delta(k,0)c. \tag{57}$$

A equação 57 pode ser escrita em termos da $\sum_m$ como:

$$\sum_m h_m \overline{h_{m+2k}} = \delta(k,0), \tag{58}$$

onde $k$ é um inteiro arbitrário[6].

Se assumirmos que $\phi$ é integrável e

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt \neq 0 \tag{59}$$

pode-se integrar ambos os lados da equação de dilação, logo

$$\begin{array}{rcl} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt &=& \sqrt{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2t-k)dt \\ &=& \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{-\infty}^{+\infty} h_k \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(s)ds \end{array}. \tag{60}$$

[5]Uma função é dita possuir um $\delta$ de Kronecker quando assume apenas os valores 0 e 1.
[6]Observe que $\sum_m |h_m|^2 = 1$ é um caso especial onde $k = 0$.

Assim, igualando-se o primeiro e terceiro termos da equação 60 e dividindo por I (cf. equação 59), temos:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} h_k = \sqrt{2}. \tag{61}$$

**Nota 5.1** *É interessante observar que a soma dos coeficientes Wavelets corresponde à metade do conjunto de intervalos da oitava, correspondendo exatamente ao intervalo de quarta aumentada, ou sexto intervalo cromático a partir de uma freqüência fundamental ($2^{6/12} = \sqrt{2}$).*

## 5.7 Propriedades das funções escalonantes

A função $\phi$ que resolve a equação de dilação pode ser escrita como:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k)\phi(2t-k) \tag{62}$$

que no "espaço da freqüência[7]" é:

$$\hat{\phi}(\xi) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-ik\xi/2} \right) \hat{\phi}(\xi/2). \tag{63}$$

Pode-se descrever uma função $P(\xi)$ tal que:

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-ik\xi} \tag{64}$$

que em uma função periódica em $2\pi$ é chamada de símbolo do filtro $\{h_k\}$ e pode-se, então, escrever a equação 63 como:

$$\hat{\phi}(\xi) = P(\xi/2)\hat{\phi}(\xi/2), \tag{65}$$

de onde pode-se escrever:

$$\begin{array}{rcl}
\hat{\phi}(\xi/2) & = & P(\xi/4)\hat{\phi}(\xi/4) \\
\hat{\phi}(\xi/4) & = & P(\xi/8)\hat{\phi}(\xi/8) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hat{\phi}(\xi/2^{n-1}) & = & P(\xi/2^n)\hat{\phi}(\xi/2^n)
\end{array}$$

[7]Note que não se pode falar em domínio da freqüência neste caso.

e, portanto:

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(\xi/2^n) \prod_{k=1}^{n} P(\xi/2^k). \tag{66}$$

Podemos, agora, enunciar dois corolários:

**Corolário 5.4** *A função escalonante $\phi$ é integrável.*

**Corolário 5.5** *A função escalonante $\phi \in \Re$*

Como conseqüência do corolário 5.4 pode-se dizer que $\hat{\phi}$ é contínua e que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)dt = \sqrt{2\pi}\hat{\phi}(0) \neq 0.$$

Conforme Daubechies [5], se a integral de $\phi(t)dt$ é diferente de zero, implica que $P(0) = 1$ e, por causa da continuidade de $\hat{\phi}$, pode-se limitar a equação 66 a:

$$\hat{\phi}(\xi) = \hat{\phi}(0) \prod_{k=1}^{\infty} P(\xi/2^k). \tag{67}$$

O corolário 5.5 pode ser usado para demonstrar que $\hat{\phi}(0) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ e, generalizando, $\hat{\phi}(0) > 0$.

Se é possível expressar a ortogonalidade da função escalonante $\phi(t)$ por $\phi(t-k)$ no "espaço da freqüência", pode-se escrever (usando-se a identidade de Parseval):

$$\begin{aligned}
\delta(k,0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t)\overline{\phi(t-k)}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\phi}(\xi)e^{ik\xi}\overline{\hat{\phi}(\xi)}d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{ik\xi}d\xi
\end{aligned}$$

Decompondo-se a última integral numa soma de integrais no intervalo $[0, 2\pi]$ e mudando-se as variáveis, pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
\delta(k,0) &= \sum_m \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} |\hat{\phi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\
&= \sum_m \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}(\mu + 2\pi m)|^2 e^{ik\mu} d\mu \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \sum_m |\hat{\phi}(\mu + 2\pi m)|^2 e^{ik\mu} \right) d\mu
\end{aligned}
$$

Onde $\sum_m |\hat{\phi}(\mu+2\pi m)|^2$ tem o mesmo coeficiente de Fourier que $1/2\pi$, logo:

$$\sum_m |\hat{\phi}(\mu + 2\pi m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \tag{68}$$

A soma na equação 68 pode ser decomposta em duas somas, uma sobre os índices ímpares e outra sobre os índices pares.

$$\sum_{\text{pares}} |\hat{\phi}(\mu + 2\pi m)|^2 + \sum_{\text{impares}} |\hat{\phi}(\mu + 2\pi m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \tag{69}$$

Substituindo a equação 63, usando $\eta = \mu/2$ e usando a periodicidade de $P$, tem-se:

$$\sum_n |P(\eta)|^2 |\hat{\phi}(\eta + 2\pi n)|^2 + \sum_n |P(\eta + \pi)|^2 |\hat{\phi}(\eta + \pi + 2\pi n)|^2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Tomando-se os fatores comuns e usando a equação 68, pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
& |P(\eta)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\eta + 2\pi n)|^2 + |P(\eta + \pi)|^2 \sum_n |\hat{\phi}(\eta + \pi + 2\pi n)|^2 \\
= \; & |P(\eta)|^2 \left( \frac{1}{2\pi} \right) + |P(\eta + \pi)|^2 \left( \frac{1}{2\pi} \right) \\
= \; & \left( \frac{1}{2\pi} \right)
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$|P(\eta)|^2 + |P(\eta + \pi)|^2 = 1, \tag{70}$$

onde $|P(0)|^2 + |P(\pi)|^2 = 1$ é um caso especial da equação 70.

Considerando-se que $P(0) = 1$ implica que $P(\pi) = 0$ e, portanto, da equação 66 tem-se que:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(2\pi) &= \hat{\phi}(0)P(\pi)P(\pi/2)\cdots = 0 \\
\hat{\phi}(4\pi) &= \hat{\phi}(0)P(2\pi)P(\pi)\cdots = 0 \\
\vdots \quad & \quad \vdots
\end{aligned}$$

onde $\hat{\phi}(2\pi m) = 0$ para todos os inteiros $m$. A equação 68 implica que $\hat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, que substituído na equação 66 produz:

$$\hat{\phi}(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}}\right) \prod_{k=1}^{\infty} P(\xi/2^k). \tag{71}$$

# 6 Aplicações

O processamento de sinais de áudio depende de funções ortogonais para a construção de filtros apropriados para efeitos e tratamento acústico ou eletroacústico. Seja para produção em estúdio ou para análise e/ou construção de sinais para computação musical, música eletroacústica e análise musical, as funções *Wavelet*s podem ser usadas, uma vez que possibilitam a aplicação de coeficientes no domínio do tempo e da freqüência, simultaneamente.

Em análise musical, a aplicação de padrões de reconhecimento nos sinais de áudio pode ser considerada, uma vez que funções do tipo $F(x, y)$ apresentam a possibilidade de produtos como $\phi(x) \cdot \phi(y)$, $\phi(x) \cdot W(y)$, $W(x) \cdot \phi(y)$ e $W(x) \cdot W(y)$ apresentarem uma clara ortogonalidade, pois os pares ordenados de $F$ podem produzir pares ordenados de coeficientes.

A grande vantagem, no uso de funções transformadas *Wavelet*s está na possibilidade do estudo localizado em ambos os domínios (tempo e frequência). Uma outra importante vantagem é que as *Wavelet*s comportam, naturalmente, a aplicação de transformadas em funções discretas. Assim como a DFT (*Discrete Fourier Transform*) está para a transformada de Fourier, a DWT (*Discrete Wavelet Transform*) está para a transformada *Wavelet*.

# Referências


[1] Burt, J. e Adelson, E. R. "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code.", *IEEE Trans. Comm.*, COM-31, pp. 532-540, 1983.

[2] Coifman, R. R. e Wickerhauser, M. V. “Wavelets and Adapted Waveform Analysis.” *Tech. Rep.*, Yale University, New Haven, `ftp://ceres.math.yale.edu/pub/`, 33 pp., sem data.

[3] Daubechies, I. (1996) “Where do Wavelets Come From? — A Personal Point of View.” Proc. of IEEE, vol. 84, no. 4.

[4] Daubechies, I. “Discrete series of coherent states and their use in signal analysis.” *tech. report*, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York.

[5] Daubechies, I. **Ten Lectures on Wavelets**, CBMS-NFS Regional Conf. Series in Appl. Math., Vol 61. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992.

[6] DeVore, R. e Lucier, B. J. “Wavelets”, *Acta Numerica* (no prelo), `http://www.amara.com/`, sem data.

[7] De Lyon, B. e Juditsky, A. “On the Computation of Wavelet Coefficients.”, *Tech. Rep.*, Inst. de Recherche Informatique et Syst. Aléatoires (IRISA), Publ. Int. nº 856, 31 pp., 1997.

[8] Gootman, E. C. e Wickerhauser, M. V. “Elementary Wavelets”, *tech. report*, Department of Mathematics, University of Georgia, Athens, Georgia.

[9] Gross, L. **Harmonic Analysis on Hilbert Space**, *Am. Math. Soc.*, AMS, 62 pp., 1963

[10] Grossman, A. e Morlet J. (1984) “Decomposition of Hardy functions into square-integrable wavelets of constant shape.” *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 15, pp. 723–736.

[11] Lemarié P. G. “Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par les intégrales singulières”, *Annales de l'Institute Fourier*, *appud*: Mallat, S.G. (1989). *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, pp. 674-693.

[12] Meyer, Y. (1986) “Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'operateurs” *Séminaire Bourbaki*, vol. 662

[13] Meyer, Y. **Wavelets Algorithms & Aplications**, trad. Robert D. Ryan, $2^a$ Ed. (1994), Philadelphia: *SIAM* - Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993.

[14] Strang, G. "Wavelets and Dilation Equations: a Brief Introduction.", *SIAMRev.*, 31, pp. 613-627, 1989.

[15] Sweldens, W. **The Construction and Application of Wavelets in Numerical Analysis.**, Tese, Columbia University, 1995.

[16] Vidaković, B. e Müller, P. "Wavelets for Kids: a Tutorial Introduction.", *tech. report*, Institute of Statistics and Decision Sciences, Duke University, Durham.

[17] Wickerhauser, M. V. **Lectures on Wavelet Packet Algorithms**, *Tech. Rep.*, `ftp://ceres.math.yale.edu/pub/`, Dept. Math. University of Washington, St. Louis, 75 pp., 1991.